Ausführliche Lösungen zu den Übungsaufgaben im

MINISKRIPT

Lösungen - Exponentialfunktionen

1. Zuordnung der Funktionsgraphen „2“ bis „5“ anhand charakteristischer Merkmale:

„2“ Eigenschaften, die vom Graph abgelesen werden können:

- streng monoton fallend
- Annäherung an -3 für $x \to \infty$
- verläuft durch Punkt $(0\,|-2)$

Setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichungen ein, so erkennt man, dass wegen dem Punkt $(0\,|-2)$ nur $g(x)$ und $h(x)$ infrage kommen. Da der Funktionsgraph zudem streng monoton fällt, muss außerdem der Exponent ein negatives Vorzeichen haben. Die richtige Lösung ist demnach $\underline{\underline{h(x)}}$.

„3“ Eigenschaften, die vom Graph abgelesen werden können:

- streng monoton steigend
- Annäherung an 3 für $x \to -\infty$
- verläuft durch Punkt $(3\,|\,4)$

Durch Einsetzen von $x = 3$ kann festgestellt werden, dass nur der Graph von $\underline{\underline{f(x)}}$ durch den Punkt $(3\,|\,4)$ verläuft.

„4“ Eigenschaften, die vom Graph abgelesen werden können:

- streng monoton steigend
- verläuft durch Punkt $(0\,|\,2)$

Einsetzen von $x = 0$ in die einzelnen Funktionsgleichung zeigt, dass nur der Graph von $\underline{\underline{k(x)}}$ durch den Punkt $(0\,|\,2)$ verläuft.

„5“ Eigenschaften, die vom Graph abgelesen werden können:

- streng monoton steigend
- verläuft durch Punkt $(0\,|-2)$

Setzt man $x = 0$ in die Funktionsgleichungen ein, so erkennt man, dass wegen dem Punkt $(0\,|-2)$ nur $g(x)$ und $h(x)$ infrage kommen. Da der Funktionsgraph hier nun streng monoton steigt, muss der Exponent ein positives Vorzeichen haben. Die richtige Lösung ist demnach $\underline{\underline{g(x)}}$.

2. a) Die Berechnung der ersten Ableitung erfolgt unter Verwendung der Kettenregel:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= e^{2x+1} \\
f_1'(x) &= \left[e^{2x+1} \cdot (2x+1)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= e^{2x+1} \cdot 2 && \text{(Anwendung)} \\
&= 2e^{2x+1}
\end{aligned}$$

b) Wieder wird die Kettenregel für die Berechnung der ersten Ableitung verwendet:

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= -4e^{-2x+5} \\
f_2'(x) &= \left[-4e^{-2x+5} \cdot (-2x+5)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= -4e^{-2x+5} \cdot (-2) && \text{(Anwendung)} \\
&= 8e^{-2x+5}
\end{aligned}$$

c) Der Summand 23 entfällt beim Ableiten. Für den Exponentialterm wird wieder die Kettenregel verwendet:

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= 23 + e^{-4x-2} \cdot 7 = 23 + 7e^{-4x-2} \\
f_3'(x) &= \left[7e^{-4x-2} \cdot (-4x-2)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= 7e^{-4x-2} \cdot (-4) && \text{(Anwendung)} \\
&= -28e^{-4x-2}
\end{aligned}$$

3. Für die Ableitungen wird jeweils Produkt- und die Kettenregel verwendet:

a)

$$g_1(x) = e^x \cdot (25x + 7)$$

$$\begin{aligned}
g_1'(x) &= [(e^x)' \cdot (25x+7) + e^x \cdot (25x+7)'] && \text{(Ansatz Produktregel)}\\
&= (e^x) \cdot (25x+7) + e^x \cdot 25 && \text{(Anwendung)}\\
&= e^x \cdot (25x+7) + e^x \cdot 25 && (e^x \text{ ausklammern})\\
&= e^x \cdot (25x+7+25) && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= e^x \cdot (25x+32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_1''(x) &= [(e^x)' \cdot (25x+32) + e^x \cdot (25x+32)'] && \text{(Ansatz Produktregel)}\\
&= (e^x) \cdot (25x+32) + e^x \cdot 25 && \text{(Anwendung)}\\
&= e^x \cdot (25x+32) + e^x \cdot 25 && (e^x \text{ ausklammern})\\
&= e^x \cdot (25x+32+25) && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= e^x \cdot (25x+57)
\end{aligned}$$

b)

$$g_2(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-5x+7} + 8$$

$$\begin{aligned}
g_2'(x) &= \left[(x^2-1)' \cdot e^{-5x+7} + (x^2-1) \cdot (e^{-5x+7})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)}\\
&= \left[(2x) \cdot e^{-5x+7} + (x^2-1) \cdot e^{-5x+7} \cdot (-5x+7)'\right] && \text{(Ansazu Kettenregel)}\\
&= 2x \cdot e^{-5x+7} + (x^2-1) \cdot e^{-5x+7} \cdot (-5) && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= 2x \cdot e^{-5x+7} + (-5x^2+5) \cdot e^{-5x+7} && (e^{-5x+7} \text{ ausklammern})\\
&= (-5x^2+2x+5) \cdot e^{-5x+7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_2''(x) &= \left[(-5x^2+2x+5)' \cdot e^{-5x+7} + (-5x^2+2x+5) \cdot (e^{-5x+7})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)}\\
&= \left[(-5 \cdot 2x + 2) \cdot e^{-5x+7} + (-5x^2+2x+5) \cdot e^{-5x+7} \cdot (-5x+7)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)}\\
&= (-10x+2) \cdot e^{-5x+7} + (-5x^2+2x+5) \cdot e^{-5x+7} \cdot (-5) && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= (-10x+2) \cdot e^{-5x+7} + (25x^2-10x-25) \cdot e^{-5x+7} && (e^{-5x+7} \text{ ausklammern})\\
&= (25x^2-20x-23) \cdot e^{-5x+7}
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
g_3(x) &= (x+1)\cdot 5\cdot(e^{x+27}+3) \\
&= (x+1)\cdot(5e^{x+27}+15) && \text{(Ausmultiplizieren)} \\
&= 5xe^{x+27}+15x+5e^{x+27}+15 && (e^{x+27}\text{ ausklammern}) \\
&= (5x+5)e^{x+27}+15x+15
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_3'(x) &= \left[((5x+5)'\cdot e^{x+27}+(5x+5)\cdot(e^{x+27})')+15\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\
&= \left[(5\cdot e^{x+27}+(5x+5)\cdot e^{x+27}\cdot(x+27)')+15\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= (5\cdot e^{x+27}+(5x+5)\cdot e^{x+27}\cdot 1)+15 && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= (5\cdot e^{x+27}+(5x+5)\cdot e^{x+27})+15 && (e^{x+27}\text{ ausklammern}) \\
&= (5x+10)\cdot e^{x+27}+15
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_3''(x) &= \left[(5x+10)'\cdot e^{x+27}+(5x+10)\cdot(e^{x+27})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\
&= \left[5\cdot e^{x+27}+(5x+10)\cdot e^{x+27}\cdot(x+27)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= 5\cdot e^{x+27}+(5x+10)\cdot e^{x+27}\cdot 1 && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= 5\cdot e^{x+27}+(5x+10)\cdot e^{x+27} && (e^{x+27}\text{ ausklammern}) \\
&= (5x+15)\cdot e^{x+27}
\end{aligned}
$$

4. h(x): **Nullstellen**

Die Nullstellen der Funktion $h(x) = 5x \cdot e^{5x}$ entsprechen den Nullstellen des Terms 5x, da die Exponentialfunktion nie den Wert null annimmt:

$$\begin{aligned} & h(x) = 0 & \\ \Rightarrow \quad & 5x = 0 & \mid :5 \\ \Longleftrightarrow \quad & x = 0 & \end{aligned}$$

Die Nullstelle der Funktion liegt bei $\underline{\underline{x_1 = 0}}$.

Schnittpunkt mit der y-Achse

Um zu dem Funktionswert an dieser Stelle zu gelangen wird $x = 0$ in die Funktionsgleichung eingesetzt:

$$h(0) = 5 \cdot 0 \cdot e^{5 \cdot 0} = 0$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse lauten $\underline{\underline{S_y\,(0\,|\,0)}}$ (ergibt sich in diesem Fall alternativ auch direkt aus der Nullstelle).

Art und Koordinaten der Extrempunkte

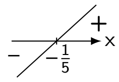
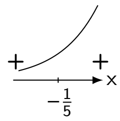
Um diese zu bestimmen wird zunächst mithilfe von Produkt- und Kettenregeln die erste Ableitung der Funktion berechnet:

$$\begin{aligned} h(x) &= 5x \cdot e^{5x} & \\ h'(x) &= \left[(5x)' \cdot e^{5x} + 5x \cdot (e^{5x})'\right] & \text{(Ansatz Produktregel)} \\ &= \left[5 \cdot e^{5x} + 5x \cdot e^{5x} \cdot (5x)'\right] & \text{(Ansatz Kettenregel)} \\ &= 5 \cdot e^{5x} + 5x \cdot e^{5x} \cdot 5 & \text{(Anwendung)} \\ &= 5 \cdot e^{5x} + 25x \cdot e^{5x} & (e^{5x} \text{ ausklammern}) \\ &= (5 + 25x) \cdot e^{5x} & \end{aligned}$$

Anschließend wird die Nullstelle der ersten Ableitung bestimmt. Auch hier entspricht dies wieder der Nullstelle des linearen Terms, da die Exponentialfunktions niemals null wird.

$$\begin{aligned} & h'(x) = 0 & \\ \Rightarrow \quad & 5 + 25x = 0 & \mid -5 \\ \Longleftrightarrow \quad & 25x = -5 & \mid :25 \\ \Longleftrightarrow \quad & x = -\frac{1}{5} & \end{aligned}$$

Nun kann eine Vorzeichentabelle erstellt werden:

x	$x < -\frac{1}{5}$	$x = -\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5} < x$	Skizzen
$(5 + 25x)$	$-$	0	$+$	
e^{5x}	$+$	$+$	$+$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	
G_h	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	

Somit liegt bei $x = -\frac{1}{5}$ ein Tiefpunkt der Funktion, für den final noch der Funktionswert bestimmt wird.

$$h\left(-\frac{1}{5}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot e^{5\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)} = -e^{-1}$$

Die Koordinaten des Tiefpunktes lauten $\underline{\underline{TIP\left(-\frac{1}{5}\,\middle|\,-e^{-1}\right)}}$.

k(x): **Nullstellen**

Die Nullstellen der Funktion $k(x) = (-x^2 + x + 1) \cdot e^{-x+1}$ entsprechen den Nullstellen des Terms $(-x^2 + x + 1)$, da die Exponentialfunktion nie den Wert null annimmt:

$$k(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{-2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{oder} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Die Nullstelle der Funktion liegt bei $\underline{\underline{x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}}}$ und $\underline{\underline{x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}}$.

Schnittpunkt mit der y-Achse

Um zu dem Funktionswert an dieser Stelle zu gelangen wird $x = 0$ in die Funktionsgleichung eingesetzt:

$$k(0) = (-0^2 + 0 + 1) \cdot e^{-0+1} = 1 \cdot e^1 = e$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse lauten $\underline{\underline{S_y(0\,|\,e)}}$.

Art und Koordinaten der Extrempunkte

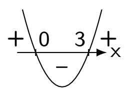
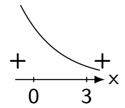
Um diese zu bestimmen wird zunächst mithilfe von Produkt- und Kettenregeln die erste Ableitung der Funktion berechnet:

$$
\begin{aligned}
k(x) &= (-x^2+x+1)\cdot e^{-x+1} \\
k'(x) &= \left[(-x^2+x+1)'\cdot e^{-x+1} + (-x^2+x+1)\cdot (e^{-x+1})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\
&= \left[(-2x+1)\cdot e^{-x+1} + (-x^2+x+1)\cdot e^{-x+1}\cdot(-x+1)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= (-2x+1)\cdot e^{-x+1} + (-x^2+x+1)\cdot e^{-x+1}\cdot(-1) && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= (-2x+1)\cdot e^{-x+1} + (x^2-x-1)\cdot e^{-x+1} && (e^{-x+1}\text{ ausklammern)} \\
&= (-2x+1+x^2-x-1)\cdot e^{-x+1} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= (x^2-3x)\cdot e^{-x+1}
\end{aligned}
$$

Anschließend werden die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt. Auch hier entspricht dies wieder den Nullstellen des quadratischen Terms, da die Exponentialfunktions niemals null wird.

$$
\begin{aligned}
& & k'(x) &= 0 \\
&\Rightarrow & x^2-3x &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & x(x-3) &= 0 \\
&\Rightarrow & x_1 = 0 \quad &\text{oder} \quad x-3=0 \\
&\Rightarrow & x_1 = 0 \quad &\text{oder} \quad x_2 = 3
\end{aligned}
$$

Nun kann eine Vorzeichentabelle erstellt werden:

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<3$	$x=3$	$3<x$	Skizzen
(x^2-3x)	$+$	0	$-$	0	$+$	
e^{-x+1}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
$k'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
G_k	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	

Somit liegt bei $x=0$ ein Hochpunkt und bei $x=3$ ein Tiefpunkt der Funktion, für die noch noch die Funktionswerte bestimmt werden.

$$k(0) = e \quad \text{(siehe oben)} \qquad\qquad k(3) = (-3^2+3+1)\cdot e^{-3+1} = -5e^{-2}$$

Die Koordinaten der Extrempunkte lauten $\underline{\underline{\text{HOP}\,(0\,|\,e)}}$ und $\underline{\underline{\text{TIP}\,(3\,|\,-5e^{-2})}}$.