Ausführliche Lösungen zu den Übungsaufgaben im

MINISKRIPT

Lösungen - Extrema und Monotonieverhalten

1. Zunächst wird die erste Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned}
&\text{Funktion:} && f_1(x) = -\frac{1}{3}(x^3 + 10{,}5x^2 + 36x + 40{,}5) \\
&\text{Erste Ableitung:} && f_1'(x) = -\frac{1}{3}(3x^2 + 10{,}5 \cdot 2x + 36) \\
& && = -\frac{1}{3}(3x^2 + 21x + 36) \qquad \text{(Ausmultiplizieren)} \\
& && = -x^2 - 7x - 12 \\
&\text{Ansatz NST:} && f_1'(x) = 0 \\
&\iff && 0 = -x^2 - 7x - 12
\end{aligned}$$

Nun können die Nullstellen der ersten Ableitung mithilfe der quadratischen Lösungsformel bestimmt werden:

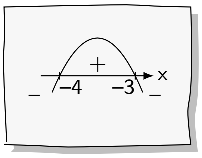
$$x_{1;2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{-2}$$

$$x_1 = -4 \quad \text{oder} \quad x_2 = -3$$

Bei der ersten Ableitung handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel. Damit kann nun eine Vorzeichentabelle erstellt werden.

x	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < -3$	$x = -3$	$-3 < x$
$G_{f_1'}$	$-$	0	$+$	0	$-$
G_{f_1}	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	HOP	$\searrow$

Skizze Graph $f_1'(x)$



Demnach ist der Graph der Funktion in den Intervallen $]-\infty; -4]$ und $[-3; \infty[$ streng monoton fallend und im Intervall $[-4; -3]$ streng monoton steigend. Bei $x = -4$ liegt somit ein Tiefpunkt und bei $x = -3$ ein Hochpunkt, deren Koordinaten durch Einsetzen bestimmt werden:

$$f_1(-4) = -\frac{1}{3}((-4)^3 + 10{,}5 \cdot (-4)^2 + 36 \cdot (-4) + 40{,}5) = -\frac{1}{6} \approx -0{,}17$$

$$f_1(-3) = -\frac{1}{3}((-3)^3 + 10{,}5 \cdot (-3)^2 + 36 \cdot (-3) + 40{,}5) = 0$$

Die Koordinaten der Extrempunkte lauten somit $\underline{\underline{\text{TIP}\,(-4\,|\,-0{,}17)}}$ und $\underline{\underline{\text{HOP}\,(-3\,|\,0)}}$.

2. Zunächst wird die erste Ableitung bestimmt:

$$\text{Funktion:} \qquad f_2(x) = -\frac{2}{3}(x^3 + 10{,}5x^2 + 36x + 42)$$

$$\begin{aligned}
\text{Erste Ableitung:} \qquad f_2'(x) &= -\frac{2}{3}(3x^2 + 10{,}5 \cdot 2x + 36) \\
&= -\frac{2}{3}(3x^2 + 21x + 36) \qquad \text{(Ausmultiplizieren)} \\
&= -2x^2 - 14x - 24
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ansatz NST:} \qquad f_2'(x) &= 0 \\
\iff \qquad 0 &= -2x^2 - 14x - 24
\end{aligned}$$

Nun können die Nullstellen der ersten Ableitung mithilfe der quadratischen Lösungsformel bestimmt werden:

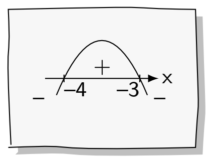
$$x_{1;2} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-24)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{14 \pm \sqrt{4}}{-4}$$

$$x_1 = -4 \quad \text{oder} \quad x_2 = -3$$

Bei der ersten Ableitung handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel. Damit kann nun eine Vorzeichentabelle erstellt werden.

x	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < -3$	$x = -3$	$-3 < x$
$G_{f_2'}$	$-$	0	$+$	0	$-$
G_{f_2}	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	HOP	$\searrow$

Skizze Graph $f_2'(x)$



Demnach ist der Graph der Funktion in den Intervallen $]-\infty; -4]$ und $[-3; \infty[$ streng monoton fallend und im Intervall $[-4; -3]$ streng monoton steigend. Bei $x = -4$ liegt somit ein Tiefpunkt und bei $x = -3$ ein Hochpunkt vor, deren Koordinaten durch Einsetzen bestimmt werden:

$$f_2(-4) = -\frac{2}{3}\left((-4)^3 + 10{,}5 \cdot (-4)^2 + 36 \cdot (-4) + 42\right) = -\frac{4}{3} \approx -1{,}33$$

$$f_2(-3) = -\frac{2}{3}\left((-3)^3 + 10{,}5 \cdot (-3)^2 + 36 \cdot (-3) + 42\right) = -1$$

Die Koordinaten der Extrempunkte lauten somit $\underline{\underline{TIP\,(-4\,|\,-1{,}33)}}$ und $\underline{\underline{HOP\,(-3\,|\,-1)}}$.

3. Zunächst wird die erste Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned}
\text{Funktion:}\quad f_3(x) &= \frac{1}{6}(x-5)^2\cdot(2x-1) && \text{(Binomische Formel)}\\
&= \frac{1}{6}(x^2-10x+25)\cdot(2x-1) && \text{(Ausmultiplizieren)}\\
&= \frac{1}{6}(2x^3-20x^2+50x-x^2+10x-25) && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= \frac{1}{6}(2x^3-21x^2+60x-25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Erste Ableitung:}\quad f_3'(x) &= \frac{1}{6}(2\cdot 3x^2-21\cdot 2x+60)\\
&= \frac{1}{6}(6x^2-42x+60) && \text{(Ausmultiplizieren)}\\
&= x^2-7x+10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ansatz NST:}\quad & f_3'(x) = 0\\
\Longleftrightarrow\quad & 0 = x^2-7x+10
\end{aligned}$$

Nun können die Nullstellen der ersten Ableitung mithilfe der quadratischen Lösungsformel bestimmt werden:

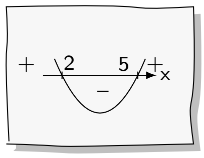
$$x_{1;2} = \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1} = \frac{7\pm\sqrt{9}}{2}$$

$$x_1 = 2 \quad \text{oder} \quad x_2 = 5$$

Bei der ersten Ableitung handelt es sich um eine nach oben geöffnete Parabel. Damit kann nun eine Vorzeichentabelle erstellt werden.

x	$x<2$	$x=2$	$2<x<5$	$x=5$	$5<x$
$G_{f_3'}$	$+$	0	$-$	0	$+$
G_{f_3}	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	TIP	$\nearrow$

Skizze Graph $f_3'(x)$



Demnach ist der Graph der Funktion in den Intervallen $]-\infty;\,2]$ und $[5;\,\infty[$ streng monoton steigend und im Intervall $[2;\,5]$ streng monoton fallend. Bei $x=2$ liegt somit ein Hochpunkt und bei $x=5$ ein Tiefpunkt vor, deren Koordinaten durch Einsetzen bestimmt werden:

$$f_3(2) = \frac{1}{6}(2-5)^2\cdot(2\cdot 2-1) = 4{,}5$$

$$f_3(5) = \frac{1}{6}(5-5)^2\cdot(2\cdot 5-1) = 0$$

Die Koordinaten der Extrempunkte lauten somit $\underline{\underline{\text{HOP}\,(2\,|\,4{,}5)}}$ und $\underline{\underline{\text{TIP}\,(5\,|\,0)}}$.

4. Zunächst wird die erste Ableitung bestimmt:

$$
\begin{aligned}
\text{Funktion:} \quad & f_4(x) = \frac{-x^3}{3} - x^2 - 1 \\
\text{Erste Ableitung:} \quad & f_4'(x) = -\frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 1 \cdot 2x \\
& = \frac{-3x^2}{3} - 2x \\
& = -x^2 - 2x \\
\text{Ansatz NST:} \quad & f_4'(x) = 0 \\
\iff \quad & 0 = -x^2 - 2x
\end{aligned}
$$

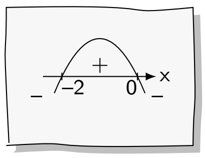
Nun können die Nullstellen der ersten Ableitung durch Ausklammern bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
& 0 = x \cdot (-x - 2) \\
\Rightarrow \quad & -x - 2 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = 0 \\
\iff \quad & x_1 = -2 \quad \text{oder} \quad x_2 = 0
\end{aligned}
$$

Bei der ersten Ableitung handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel. Damit kann nun eine Vorzeichentabelle erstellt werden.

x	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x$
$G_{f_4'}$	$-$	0	$+$	0	$-$
G_{f_4}	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	HOP	$\searrow$

Skizze Graph $f_4'(x)$



Demnach ist der Graph der Funktion in den Intervallen $]-\infty; -2]$ und $[0; \infty[$ streng monoton fallend und im Intervall $[-2; 0]$ streng monoton steigend. Bei $x = -2$ liegt somit ein Tiefpunkt und bei $x = 0$ ein Hochpunkt vor, deren Koordinaten durch Einsetzen bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
f_4(-2) &= \frac{-(-2)^3}{3} - (-2)^2 - 1 = -\frac{7}{3} \approx -2{,}33 \\
f_4(0) &= \frac{-0^3}{3} - 0^2 - 1 = -1
\end{aligned}
$$

Die Koordinaten der Extrempunkte lauten somit $\underline{\underline{TIP\,(-2\,|\,-2{,}33)}}$ und $\underline{\underline{HOP\,(0\,|\,-1)}}$.

5. Zunächst wird die erste Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned}
\text{Funktion:} \quad & f_5(x) = -\frac{1}{3}(x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 11) \\
\text{Erste Ableitung:} \quad & f_5'(x) = -\frac{1}{3}(3x^2 - 7{,}5 \cdot 2x + 12) \\
& = -\frac{1}{3}(3x^2 - 15x + 12) \qquad \text{(Ausmultiplizieren)} \\
& = -x^2 + 5x - 4 \\
\text{Ansatz NST:} \quad & f_5'(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & 0 = -x^2 + 5x - 4
\end{aligned}$$

Nun können die Nullstellen der ersten Ableitung mithilfe der quadratischen Lösungsformel bestimmt werden:

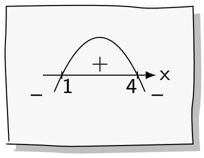
$$x_{1;2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{oder} \quad x_2 = 4$$

Bei der ersten Ableitung handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel. Damit kann nun eine Vorzeichentabelle erstellt werden.

x	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$
$G_{f_5'}$	$-$	0	$+$	0	$-$
G_{f_5}	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	HOP	$\searrow$

Skizze Graph $f_5'(x)$



Demnach ist der Graph der Funktion in den Intervallen $]-\infty; 1]$ und $[4; \infty[$ streng monoton fallend und im Intervall $[1; 4]$ streng monoton steigend. Bei $x = 1$ liegt somit ein Tiefpunkt und bei $x = 4$ ein Hochpunkt, deren Koordinaten durch Einsetzen bestimmt werden:

$$f_5(1) = -\frac{1}{3}(1^3 - 7{,}5 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 + 11) = -5{,}5$$

$$f_5(4) = -\frac{1}{3}(4^3 - 7{,}5 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 + 11) = -1$$

Die Koordinaten der Extrempunkte lauten somit $\underline{\underline{\text{TIP}\,(1 \mid -5{,}5)}}$ und $\underline{\underline{\text{HOP}\,(4 \mid -1)}}$.

6. Zunächst wird die erste Ableitung bestimmt:

$$\text{Funktion:}\qquad f_6(x) = \frac{1}{100}(x^4 - 26x^2 + 48x + 200)$$

$$\begin{aligned}
\text{Erste Ableitung:}\qquad f_6'(x) &= \frac{1}{100}(4x^3 - 26 \cdot 2x + 48)\\
&= \frac{1}{100}(4x^3 - 52x + 48) && \text{(4 ausklammern)}\\
&= \frac{1}{100} \cdot 4(x^3 - 13x + 12)\\
&= \frac{1}{25}(x^3 - 13x + 12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ansatz NST:}\qquad & f_6'(x) = 0\\
\Rightarrow\qquad & 0 = x^3 - 13x + 12
\end{aligned}$$

Durch Ausprobieren und Einsetzen der Werte $-2; -1; 1$ und 2 kann man feststellen, dass $x_1 = 1$ eine Nullstelle des kubischen Terms ist:

$$1^3 - 13 \cdot 1 + 12 = 1 - 13 + 12 = 0$$

Mittels Polynomdivision kann nun weiter vereinfacht werden.

$$\begin{array}{rlllll}
 & (x^3 & & -\,13x & +\,12) & : \ (x-1) = x^2 + x - 12\\
- & (x^3 & -\,x^2 & &) & \\
\hline
 & & x^2 & -\,13x & +\,12 & \\
 & - & (x^2 & -\,x &) & \\
\hline
 & & & -\,12x & +\,12 & \\
 & & - & (-\,12x & +\,12) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Die Nullstellen des resultierenden quadratischen Terms können nun mit der quadratischen Lösungsformel bestimmt werden:

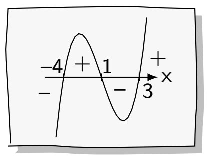
$$x_{2;3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x_2 = -4 \quad \text{oder} \quad x_3 = 3$$

Beim Graph der ersten Ableitung handelt es sich um den einer kubischen Funktion in „N-Form“. Damit kann nun eine Vorzeichentabelle erstellt werden.

x	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x$
$G_{f_6'}$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
G_{f_6}	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	TIP	$\nearrow$

Skizze Graph $f_6'(x)$



Demnach ist der Graph der Funktion in den Intervallen $]-\infty; -4]$ und $[1; 3]$ streng monoton fallend und in den Intervallen $[-4; 1]$ und $[3; \infty[$ streng monoton steigend. Bei $x = -4$ und $x = 3$ liegt somit ein Tiefpunkt und bei $x = 1$ ein Hochpunkt, deren Koordinaten durch Einsetzen bestimmt werden:

$$f_6(-4) = \frac{1}{100}((-4)^4 - 26 \cdot (-4)^2 + 48 \cdot (-4) + 200) = -\frac{38}{25} = -1{,}52$$
$$f_6(1) = \frac{1}{100}(1^4 - 26 \cdot 1^2 + 48 \cdot 1 + 200) = \frac{223}{100} = 2{,}23$$
$$f_6(3) = \frac{1}{100}(3^4 - 26 \cdot 3^2 + 48 \cdot 3 + 200) = \frac{191}{100} = 1{,}91$$

Die Koordinaten der Extrempunkte lauten somit $\underline{\underline{\mathrm{TIP}\,(-4\,|\,-1{,}52)}}$, $\underline{\underline{\mathrm{HOP}\,(1\,|\,2{,}23)}}$ und $\underline{\underline{\mathrm{TIP}\,(3\,|\,1{,}91)}}$.