lernverlag www.lern-verlag.de

Ausführliche Lösungen zu den Übungsaufgaben im

MINISKRIPT

Lösungen - Partielle Integration

1a) Finden einer Stammfunktion von $f(x) = x \cdot \ln(x)$:

1. Schritt: Festlegung von $u(x)$ und $v'(x)$. Hier wird nun nach der Faustregel „für $u(x)$ werden Logarithmusfunktionen bevorzugt“ entschieden.

$$\underbrace{\ln(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{x}_{v'(x)} dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = \ln(x) \quad v'(x) = x$$

2. Schritt: Bestimmen der Terme von $u'(x)$ und $v(x)$:

$$u(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$
$$v'(x) = x \quad \Rightarrow \quad v(x) = \int v'(x)dx = \int xdx = \frac{1}{2}x^2$$

3. Schritt: Einsetzen in die Formel:

$$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)dx$$
$$\int \ln(x) \cdot x \, dx = \ln(x) \cdot \frac{1}{2}x^2 - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

Der resultierende Term kann zusammengefasst und das Endergebnis berechnet werden (als Integrationskonstante wird $C = 0$ gewählt):

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \ln(x) \cdot xdx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

1b) Finden einer Stammfunktion von $g(x) = e^x \cdot x^2$:

1. Schritt: Festlegung von $u(x)$ und $v'(x)$. Hier wird nun nach der Faustregel „für $v'(x)$ werden Exponentialfunktionen bevorzugt“ entschieden.

$$\underbrace{x^2}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^x}_{v'(x)} dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = x^2 \quad v'(x) = e^x$$

2. Schritt: Bestimmen der Terme von $u'(x)$ und $v(x)$:

$$u(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 2x$$
$$v'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad v(x) = \int v'(x)dx = \int e^x dx = e^x$$

3. Schritt: Einsetzen in die Formel:

$$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)dx$$
$$\int x^2 \cdot e^x \, dx = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x \, dx$$

Der resultierende Term wird zunächst zusammengefasst:

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x dx = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx$$

Das verbleibende Integral muss separat per partieller Integration gelöst werden, wie es im MINI-SKRIPT als Beispiel bereits gezeigt ist. Demnach gilt für die Stammfunktion (Als Integrationskonstante wird $C = 0$) gewählt:

$$G(x) = x^2 \cdot e^x - 2\int x \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2((x-1) \cdot e^x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x$$

1c) Finden einer Stammfunktion von $h(x) = x^2 \cdot \ln(x)$:

1. Schritt: Festlegung von $u(x)$ und $v'(x)$. Hier wird wieder nach der Faustregel „für $u(x)$ werden Logarithmusfunktionen bevorzugt“ entschieden.

$$\underbrace{\ln(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{x^2}_{v'(x)} dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = \ln(x) \quad v'(x) = x^2$$

2. Schritt: Bestimmen der Terme von $u'(x)$ und $v(x)$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln(x) \quad &&\Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) &= x^2 \quad &&\Rightarrow \quad v(x) = \int v'(x)dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \end{aligned}$$

3. Schritt: Einsetzen in die Formel:

$$\begin{aligned} \int u(x) \cdot v'(x)dx &= u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x)dx \\ \int \ln(x) \cdot x^2 \, dx &= \ln(x) \cdot \frac{1}{3}x^3 - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} \, dx \end{aligned}$$

Der resultierende Term kann zusammengefasst und das Endergebnis berechnet werden (als Integrationskonstante wird $C = 0$ gewählt):

$$\begin{aligned} H(x) = \int \ln(x) \cdot x^2 dx &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{3}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}x^3 \\ &= \frac{1}{3}x^3 \cdot \ln(x) - \frac{1}{9}x^3 = \frac{1}{3}x^3 \left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

2a) 1. Schritt: Festlegung von u(x) und v′(x). Hier wird nach der Faustregel „für v′(x) werden Exponentialfunktionen bevorzugt“ entschieden.

$$\int_0^3 \underbrace{2x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'(x)} dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = 2x \quad v'(x) = e^{-x}$$

2. Schritt: Bestimmen der Terme von u′(x) und v(x):

$$u(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 2$$
$$v'(x) = e^{-x} \quad \Rightarrow \quad v(x) = \int v'(x)dx = \int e^{-x}dx = -e^{-x}$$

3. Schritt: Einsetzen in die Formel:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)\, dx$$
$$\int_0^3 2x \cdot e^{-x}\, dx = [2x \cdot (-e^{-x})]_0^3 - \int_0^3 2 \cdot (-e^{-x})dx$$

Der resultierende Term kann zusammengefasst und das Endergebnis berechnet werden:

$$\int_0^3 2x \cdot e^{-x}dx = [2x \cdot (-e^{-x})]_0^3 - \int_0^3 2 \cdot (-e^{-x})dx = -2 \cdot 3 \cdot e^{-3} - (-2 \cdot 0 \cdot e^{-0}) + 2\int_0^3 e^{-x}dx$$
$$= -6e^{-3} - 0 + 2\,[-e^{-x}]_0^3 = -6e^{-3} + 2(-e^{-3} - (-e^{-0})) = -6e^{-3} + 2(-e^{-3} + 1)$$
$$= -6e^{-3} - 2e^{-3} + 2 = -8e^{-3} + 2$$

2b) 1. Schritt: Festlegung von u(x) und v′(x). Hier wird wieder nach der Faustregel „für u(x) werden Logarithmusfunktionen bevorzugt“ entschieden.

$$\int_1^2 \underbrace{\ln(x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{x^5}_{v'(x)} dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = \ln(x) \quad v'(x) = x^5$$

2. Schritt: Bestimmen der Terme von u′(x) und v(x):

$$u(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$
$$v'(x) = x^5 \quad \Rightarrow \quad v(x) = \int v'(x)dx = \int x^5 dx = \frac{1}{6}x^6$$

3. Schritt: Einsetzen in die Formel:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)dx$$
$$\int_1^2 \ln(x) \cdot x^5 \, dx = [\ln(x) \cdot \frac{1}{6}x^6]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{6}x^6 \, dx$$

Der resultierende Term kann zusammengefasst und das Endergebnis berechnet werden:

$$\int_1^2 \ln(x) \cdot x^5 dx = \left[\ln(x) \cdot \frac{1}{6}x^6\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{6}x^6 dx$$
$$= \frac{1}{6}\ln(2) \cdot 2^6 - \frac{1}{6}\overbrace{\ln(1)}^{=0} \cdot 1^6 - \frac{1}{6}\int_1^2 x^5 dx = \frac{1}{6}\ln(2) \cdot 64 - 0 - \frac{1}{6}\left[\frac{1}{6}x^6\right]_1^2$$
$$= \frac{32}{3}\ln(2) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} \cdot 2^6 - \frac{1}{6} \cdot 1^6\right) = \frac{32}{3}\ln(2) - \frac{7}{4}$$

2c) 1. Schritt: Festlegung von u(x) und v′(x). Hier wird nach der Faustregel „für v′(x) werden Exponentialfunktionen bevorzugt“ entschieden.

$$\int_1^2 \underbrace{(-4x^2)}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v'(x)} dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = -4x^2 \quad v'(x) = e^{2x}$$

2. Schritt: Bestimmen der Terme von u′(x) und v(x):

$$u(x) = -4x^2 \quad \Rightarrow \quad u'(x) = -4 \cdot 2x = -8x$$
$$v'(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad v(x) = \int v'(x)dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

3. Schritt: Einsetzen in die Formel:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)dx$$
$$\int_1^2 (-4x^2) \cdot e^{2x} dx = [(-4x^2) \cdot \frac{1}{2}e^{2x}]_1^2 - \int_1^2 -8x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} dx$$

Der resultierende Term kann zusammengefasst werden:

$$\int_1^2 (-4x^2) \cdot e^{2x}dx = \left[(-4x^2) \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^2 - \int_1^2 -8x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}dx$$
$$= -2 \cdot 2^2 \cdot e^{2\cdot 2} - \left(-2 \cdot 1^2 \cdot e^{2\cdot 1}\right) + \int_1^2 4x \cdot e^{2x}dx = -8e^4 + 2e^2 + 4\int_1^2 x \cdot e^{2x}dx$$

Das verbleibende Integral wird mittels partieller Integration separat betrachtet.

1. Schritt: Festlegung von u(x) und v′(x). Wieder wird nach der Faustregel „für v′(x) werden Exponentialfunktionen bevorzugt“ entschieden.

$$\int_1^2 \underbrace{x}_{u(x)} \cdot \underbrace{e^{2x}}_{v'(x)} dx \quad \Rightarrow \quad u(x) = x \quad v'(x) = e^{2x}$$

2. Schritt: Bestimmen der Terme von u′(x) und v(x):

$$u(x) = x \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad v(x) = \int v'(x)dx = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

3. Schritt: Einsetzen in die Formel:

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) \cdot u'(x)dx$$
$$\int_1^2 x \cdot e^{2x} dx = [x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}]_1^2 - \int_1^2 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} dx$$

Dies kann nun in obiges Zwischenergebnis eingesetzt, weiter umgeformt und schließlich komplett gelöst werden.

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (-4x^2)\cdot e^{2x}dx &= -8e^4 + 2e^2 + 4\int_1^2 x\cdot e^{2x}dx \\
&= -8e^4 + 2e^2 + 4\left(\left[\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}e^{2x}dx\right) \\
&= -8e^4 + 2e^2 + 4\left(\frac{2}{2}e^{2\cdot 2} - \frac{1}{2}e^{2\cdot 1} - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_1^2\right) \\
&= -8e^4 + 2e^2 + 4\left(e^4 - \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^{2\cdot 2} - \frac{1}{4}e^{2\cdot 1}\right)\right) \\
&= -8e^4 + 2e^2 + 4e^4 - 2e^2 - e^4 + e^2 \\
&= -5e^4 + e^2
\end{aligned}$$