Ausführliche Lösungen zu den Übungsaufgaben im

MINISKRIPT

Lösungen - Polynome

2a) Äquivalenzumformungen

II)

$$
\begin{aligned}
& & 7x + 2 &= 0 & &\mid -2 \\
&\Longleftrightarrow & 7x &= -2 & &\mid : 7 \\
&\Longleftrightarrow & \underline{\underline{x_1 = -\frac{2}{7}}}
\end{aligned}
$$

III)

$$
\begin{aligned}
& & x - 3 &= 0 & &\mid +3 \\
&\Longleftrightarrow & \underline{\underline{x_1 = 3}}
\end{aligned}
$$

IV)

$$
\begin{aligned}
& & -5x - 4 &= 0 & &\mid +4 \\
&\Longleftrightarrow & -5x &= 4 & &\mid : (-5) \\
&\Longleftrightarrow & \underline{\underline{x_1 = -\frac{4}{5}}}
\end{aligned}
$$

2b) Radizieren

II)

$$\begin{aligned} && 4x^2 - 9 &= 0 && \mid +9 \\ \iff && 4x^2 &= 9 && \mid :4 \\ \iff && x^2 &= \frac{9}{4} && \mid \pm\sqrt{} \\ \iff && \underline{\underline{x_1 = -\frac{3}{2}}} \quad &\text{oder} \quad \underline{\underline{x_2 = \frac{3}{2}}} && \end{aligned}$$

III)

$$\begin{aligned} && 2x^2 + 2 &= 0 && \mid -2 \\ \iff && 2x^2 &= -2 && \mid :2 \\ \iff && x^2 &= -1 && \end{aligned}$$

Die Gleichung besitzt keine Lösung, da die Quadratwurzel nicht aus negativen Zahlen gezogen werden darf.

IV)

$$\begin{aligned} && -x^2 + 3 &= 0 && \mid -3 \\ \iff && -x^2 &= -3 && \mid \cdot(-1) \\ \iff && x^2 &= 3 && \mid \pm\sqrt{} \\ \iff && \underline{\underline{x_1 = -\sqrt{3}}} \quad &\text{oder} \quad \underline{\underline{x_2 = \sqrt{3}}} && \end{aligned}$$

2c) „Mitternachtsformel“

II)

$$-3x^2 - 12x - 12 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-12)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{-6}$$

$$\underline{\underline{x_{1;2} = -2}} \quad \text{(Doppellösung)}$$

III)

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{5}{27} = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-(-\frac{1}{3}) \pm \sqrt{(-\frac{1}{3})2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-\frac{5}{27})}}{2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{81}}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{1}{3} \pm \frac{7}{9}}{\frac{4}{3}} = \frac{\frac{3}{9} \pm \frac{7}{9}}{\frac{12}{9}}$$

$$= \left(\frac{3}{9} \pm \frac{7}{9}\right) : \frac{12}{9} = \left(\frac{3}{\cancel{9}} \pm \frac{7}{\cancel{9}}\right) \cdot \frac{\cancel{9}}{12} = \frac{3 \pm 7}{12}$$

$$\underline{\underline{x_1 = -\frac{1}{3}}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x_2 = \frac{5}{6}}}$$

IV)

$$-x^2 + 2x - \frac{5}{2} = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-\frac{5}{2})}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-6}}{-2}$$

Da die Quadratwurzel nicht aus negativen Zahlen gezogen werden darf, gibt es keine Lösung.

2d) Substitution

II) Substitution $z = x^2$:

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^2 - 8z + 16 = 0$$

Anwendung Mitternachtsformel:

$$z_{1;2} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2}$$
$$z_{1;2} = 4 \quad \text{(Doppellösung)}$$

Rücksubstitution:

$$z_1 = x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} = \pm\sqrt{z_1} = \pm 2 \quad \underline{\underline{x_1 = -2}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x_2 = 2}}$$
$$z_2 = x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_{3;4} = \pm\sqrt{z_2} = \pm 2 \quad \underline{\underline{x_3 = -2}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x_4 = 2}}$$

Demnach sind $x_{1;3} = -2$ und $x_{2;4} = 2$ jeweils Doppellösungen.

III) Substitution $z = x^2$:

$$0{,}5x^4 - 1{,}345x^2 + 0{,}845 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0{,}5z^2 - 1{,}345z + 0{,}845 = 0$$

Anwendung Mitternachtsformel:

$$z_{1;2} = \frac{-(-1{,}345) \pm \sqrt{(-1{,}345)^2 - 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}845}}{2 \cdot 0{,}5} = \frac{1{,}345 \pm \sqrt{0{,}119025}}{1} = 1{,}345 \pm 0{,}345$$
$$z_1 = 1 \quad z_2 = 1{,}69$$

Rücksubstitution:

$$z_1 = x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} = \pm\sqrt{z_1} = \pm 1 \quad \underline{\underline{x_1 = -1}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x_2 = 1}}$$
$$z_2 = x^2 = 1{,}69 \quad \Rightarrow \quad x_{3;4} = \pm\sqrt{z_2} = \pm 1{,}3 \quad \underline{\underline{x_3 = -1{,}3}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x_4 = 1{,}3}}$$

2e) Ausklammern und Polynomdivision

II) Da es keinen konstanten Summanden gibt, kann zunächst ausgeklammert werden:

$$3x^4 - 7{,}5x^3 - 21x^2 + 12x = x(3x^3 - 7{,}5x^2 - 21x + 12) = 0$$

Es ergibt sich bereits die erste Nullstelle zu $\underline{\underline{x_1 = 0}}$. In der Klammer verbleibend ist ein Term dritten Grades, für welchen nun eine Nullstelle erraten werden muss. Wie bereits erwähnt sind beispielsweise $-2; -1; 1$ und 2 häufige Lösungen, sodass diese beim Erraten zuerst getestet werden können. Durch Einsetzen dieser Werte in den kubischen Term in Klammern zeigt sich, ob es sich um eine Nullstelle handelt:

$$\begin{aligned}
x = -2 \quad &\Rightarrow \quad 3 \cdot (-2)^3 - 7{,}5 \cdot (-2)^2 - 21 \cdot (-2) + 12 = 0 \\
x = -1 \quad &\Rightarrow \quad 3 \cdot (-1)^3 - 7{,}5 \cdot (-1)^2 - 21 \cdot (-1) - +12 = 13{,}5 \neq 0 \\
x = 1 \quad &\Rightarrow \quad 3 \cdot 1^3 - 7{,}5 \cdot 1^2 - 21 \cdot 1 + 12 = -13{,}5 \neq 0 \\
x = 2 \quad &\Rightarrow \quad 3 \cdot 2^3 - 7{,}5 \cdot 2^2 - 21 \cdot 2 + 12 = -36 \neq 0
\end{aligned}$$

Eine weitere Nullstelle liegt also bei $\underline{\underline{x_2 = -2}}$. Der kubische Term kann nun mithilfe der gefundenen Nullstelle mittels Polynomdivision weiter vereinfacht werden.

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & (3x^3 & -\ 7{,}5x^2 & -\ 21x & +\ 12) & :\ (x+2) \ = 3x^2 - 13{,}5x + 6 \\
- & (3x^3 & +\ 6x^2 & &) & \\
\hline
 & & -\ 13{,}5x^2 & -\ 21x & +\ 12 & \\
 & - & (-\ 13{,}5x^2 & -\ 27x &) & \\
\hline
 & & & 6x & +\ 12 & \\
 & - & & (\ 6x & +\ 12) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Die gegebene Gleichung kann mithilfe der gefundenen Nullstellen also wie folgt vereinfacht werden:

$$3x^4 - 7{,}5x^3 - 21x^2 + 12x = x(x+2)(3x^2 - 13{,}5x + 6) = 0$$

Schließlich müssen noch die Nullstellen des quadratischen Terms bestimmt werden:

$$x_{3;4} = \frac{-(-13{,}5) \pm \sqrt{(-13{,}5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6}}{2 \cdot 3} = \frac{13{,}5 \pm \sqrt{110{,}25}}{6} = \frac{13{,}5 \pm 10{,}5}{6}$$

$\underline{\underline{x_3 = 0{,}5}}$ oder $\underline{\underline{x_4 = 4}}$

III) Da es keinen konstanten Summanden gibt, kann zunächst ausgeklammert werden:

$$x^4 - 3{,}7x^3 - 6{,}2x^2 - 1{,}5x = x(x^3 - 3{,}7x^2 - 6{,}2x - 1{,}5) = 0$$

Es ergibt sich bereits die erste Nullstelle zu $\underline{\underline{x_1 = 0}}$. In der Klammer verbleibend ist ein Term dritten Grades, für welchen nun eine Nullstelle erraten werden muss. Wie bereits erwähnt sind beispielsweise $-2; -1; 1$ und 2 häufige Lösungen, sodass diese beim Erraten zuerst getestet werden können. Durch Einsetzen dieser Werte in den kubischen Term in Klammern zeigt sich, ob es sich um eine Nullstelle handelt:

$$\begin{aligned}
x = -2 \quad &\Rightarrow \quad (-2)^3 - 3{,}7 \cdot (-2)^2 - 6{,}2 \cdot (-2) - 1{,}5 = -11{,}9 \neq 0 \\
x = -1 \quad &\Rightarrow \quad (-1)^3 - 3{,}7 \cdot (-1)^2 - 6{,}2 \cdot (-1) - 1{,}5 = 0 \\
x = 1 \quad &\Rightarrow \quad 1^3 - 3{,}7 \cdot 1^2 - 6{,}2 \cdot 1 - 1{,}5 = -10{,}7 \neq 0 \\
x = 2 \quad &\Rightarrow \quad 2^3 - 3{,}7 \cdot 2^2 - 6{,}2 \cdot 2 - 1{,}5 = -20{,}7 \neq 0
\end{aligned}$$

Eine weitere Nullstelle liegt also bei $\underline{\underline{x_2 = -1}}$. Der kubische Term kann nun mithilfe der gefundenen Nullstelle mittels Polynomdivision weiter vereinfacht werden.

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & (x^3 & -\ 3{,}7x^2 & -\ 6{,}2x & -\ 1{,}5) & :\ (x+1) \ = x^2 - 4{,}7x - 1{,}5 \\
- & (x^3 & +\ x^2 & &) & \\
\hline
 & & -\ 4{,}7x^2 & -\ 6{,}2x & -\ 1{,}5 & \\
 & - & (-\ 4{,}7x^2 & -\ 4{,}7x &) & \\
\hline
 & & & -\ 1{,}5x & -\ 1{,}5 & \\
 & - & & (-\ 1{,}5x & -\ 1{,}5) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}$$

Die gegebene Gleichung kann mithilfe der gefundenen Nullstellen also wie folgt vereinfacht werden:

$$x^4 - 3{,}7x^3 - 6{,}2x^2 - 1{,}5x = x(x+1)(x^2 - 4{,}7x - 1{,}5)$$

Schließlich müssen noch die Nullstellen des quadratischen Terms bestimmt werden:

$$x_{3;4} = \frac{-(-4{,}7) \pm \sqrt{(-4{,}7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1{,}5)}}{2 \cdot 1} = \frac{4{,}7 \pm \sqrt{28{,}09}}{2} = \frac{4{,}7 \pm 5{,}3}{2}$$

$$\underline{\underline{x_3 = -0{,}3}} \quad \text{oder} \quad \underline{\underline{x_4 = 5}}$$