Ausführliche Lösungen zu den Übungsaufgaben im

MINISKRIPT

Lösungen - Wendepunkte und Krümmungsverhalten/Tangenten

1. Zunächst werden die erste und die zweite Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned}
\text{Funktion:} \quad & f_1(x) = -1(x^3 + 3x^2 - 7) \qquad \text{(Ausmultiplizieren)} \\
& = -x^3 - 3x^2 + 7 \\
\text{Erste Ableitung:} \quad & f_1'(x) = -3x^2 - 3 \cdot 2x \\
& = -3x^2 - 6x \\
\text{Zweite Ableitung:} \quad & f_1''(x) = -3 \cdot 2x - 6 \\
& = -6x - 6
\end{aligned}$$

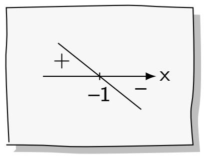
Für die Nullstelle der zweiten Ableitung gilt:

$$\begin{aligned}
& f_1''(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & -6x - 6 = 0 \qquad | + 6 \\
\Longleftrightarrow \quad & -6x = 6 \qquad | : (-6) \\
\Longleftrightarrow \quad & x = -1
\end{aligned}$$

Mit der zweiten Ableitung liegt eine linear fallende Gerade vor. Damit gilt für die Vorzeichentabelle:

x	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x$
$G_{f_1''}$	$+$	0	$-$
G_{f_1}	LK	WEP	RK

Skizze Graph $f_1''(x)$



Demnach ist der Graph von $f_1(x)$ im Intervall $]-\infty; -1]$ linksgekrümmt und im Intervall $[-1; \infty[$ rechtsgekrümmt. Bei $x = -1$ liegt ein Wendepunkt vor, dessen Funktionswert durch Einsetzen bestimmt wird:

$$f_1(-1) = -(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 7 = 5$$

Die Koordinaten des Wendepunktes lauten $\underline{\underline{WEP\,(-1\,|\,5)}}$.

Um die Gleichung der Wendetangente des Formats $t_w(x) = mx + t$ zu bestimmen, wird zunächst mithilfe der ersten Ableitung die Steigung an dieser Stelle ermittelt:

$$m = f_1'(-1) = -3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 3$$

Weiterhin werden diese Steigung und die Koordinaten des Wendepunktes in die allgemeine Form eingesetzt:

$$\begin{aligned} & y = mx + t \\ \Rightarrow \quad & 5 = 3 \cdot (-1) + t \qquad | + 3 \\ \Longleftrightarrow \quad & t = 8 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Wendetangente lautet $\underline{\underline{t_w(x) = 3x + 8}}$.

2. Zunächst werden die erste und die zweite Ableitung bestimmt:

$$
\begin{aligned}
\text{Funktion:}\quad f_2(x) &= -(x-8)(x-5)^2 && \text{(Binomische Formel)}\\
&= -(x-8)(x^2-10x+25) && \text{(Ausmultiplizieren)}\\
&= -(x^3-10x^2+25x-8x^2+80x-200) && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= -x^3+18x^2-105x+200\\
\text{Erste Ableitung:}\quad f_2'(x) &= -3x^2+18\cdot 2x-105\\
&= -3x^2+36x-105\\
\text{Zweite Ableitung:}\quad f_2''(x) &= -3\cdot 2x+36\\
&= -6x+36
\end{aligned}
$$

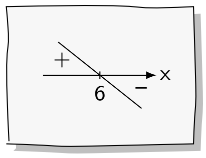
Für die Nullstelle der zweiten Ableitung gilt:

$$
\begin{aligned}
&& f_2''(x) &= 0 &&\\
\iff && -6x+36 &= 0 && \mid -36\\
\iff && -6x &= -36 && \mid :(-6)\\
\iff && x &= 6 &&
\end{aligned}
$$

Mit der zweiten Ableitung liegt eine linear fallende Gerade vor. Damit gilt für die Vorzeichentabelle:

x	$x < 6$	$x = 6$	$6 < x$
$G_{f_1''}$	$+$	0	$-$
G_{f_1}	LK	WEP	RK

Skizze Graph $f_2''(x)$



Demnach ist der Graph von $f_2(x)$ im Intervall $]-\infty;\,6]$ linksgekrümmt und im Intervall $[6;\,\infty[$ rechtsgekrümmt. Bei $x = 6$ liegt ein Wendepunkt vor, dessen Funktionswert durch Einsetzen bestimmt wird:

$$f_2(6) = -(6-8)(6-5)^2 = -(-2)\cdot 1^2 = 2$$

Die Koordinaten des Wendepunktes lauten $\underline{\underline{\text{WEP}\,(6\,|\,2)}}$.

Um die Gleichung der Wendetangente des Formats $t_w(x) = mx + t$ zu bestimmen, wird zunächst mithilfe der ersten Ableitung die Steigung an dieser Stelle ermittelt:

$$m = f_2'(6) = -3\cdot 6^2 + 36\cdot 6 - 105 = 3$$

Weiterhin werden diese Steigung und die Koordinaten des Wendepunktes in die allgemeine Form eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
&& y &= mx+t &&\\
\Rightarrow && 2 &= 3\cdot 6+t && \mid -18\\
\iff && t &= -16 &&
\end{aligned}
$$

Die Gleichung der Wendetangente lautet $\underline{\underline{t_w(x) = 3x-16}}$.

3. Zunächst werden die erste und die zweite Ableitung bestimmt:

$$
\begin{aligned}
\text{Funktion:} \quad & f_3(x) = -x^3 - 18x^2 - 105x - 196 \\
\text{Erste Ableitung:} \quad & f_3'(x) = -3x^2 - 18 \cdot 2x - 105 \\
& = -3x^2 - 36x - 105 \\
\text{Zweite Ableitung:} \quad & f_3''(x) = -3 \cdot 2x - 36 \\
& = -6x - 36
\end{aligned}
$$

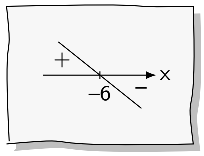
Für die Nullstelle der zweiten Ableitung gilt:

$$
\begin{aligned}
& & f_3''(x) &= 0 & \\
&\iff & -6x - 36 &= 0 & \mid +36 \\
&\iff & -6x &= 36 & \mid : (-6) \\
&\iff & x &= -6 &
\end{aligned}
$$

Mit der zweiten Ableitung liegt eine linear fallende Gerade vor. Damit gilt für die Vorzeichentabelle:

x	$x < -6$	$x = -6$	$-6 < x$
$G_{f_3''}$	$+$	0	$-$
G_{f_3}	LK	WEP	RK

Skizze Graph $f_3''(x)$



Demnach ist der Graph von $f_3(x)$ im Intervall $]-\infty; -6]$ linksgekrümmt und im Intervall $[-6; \infty[$ rechtsgekrümmt. Bei $x = -6$ liegt ein Wendepunkt vor, dessen Funktionswert durch Einsetzen bestimmt wird:

$$f_3(-6) = -(-6)^3 - 18 \cdot (-6)^2 - 105 \cdot (-6) - 196 = 2$$

Die Koordinaten des Wendepunktes lauten $\underline{\underline{WEP\,(-6\,|\,2)}}$.

Um die Gleichung der Wendetangente des Formats $t_w(x) = mx + t$ zu bestimmen, wird zunächst mithilfe der ersten Ableitung die Steigung an dieser Stelle ermittelt:

$$m = f_3'(-6) = -3 \cdot (-6)^2 - 36 \cdot (-6) - 105 = 3$$

Weiterhin werden diese Steigung und die Koordinaten des Wendepunktes in die allgemeine Form eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
& & y &= mx + t & \\
&\Rightarrow & 2 &= 3 \cdot (-6) + t & \mid +18 \\
&\iff & t &= 20 &
\end{aligned}
$$

Die Gleichung der Wendetangente lautet $\underline{\underline{t_w(x) = 3x + 20}}$.

4. Zunächst werden die erste und die zweite Ableitung bestimmt:

$$
\begin{aligned}
\text{Funktion:} \quad & f_4(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x - 2 \\
\text{Erste Ableitung:} \quad & f_4'(x) = -3x^2 + 6 \cdot 2x - 9 \\
& = -3x^2 + 12x - 9 \\
\text{Zweite Ableitung:} \quad & f_4''(x) = -3 \cdot 2x + 12 \\
& = -6x + 12
\end{aligned}
$$

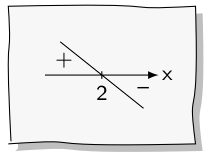
Für die Nullstelle der zweiten Ableitung gilt:

$$
\begin{aligned}
& & f_4''(x) &= 0 & \\
&\iff & -6x + 12 &= 0 & \quad |-12 \\
&\iff & -6x &= -12 & \quad |:(-6) \\
&\iff & x &= 2 &
\end{aligned}
$$

Mit der zweiten Ableitung liegt eine linear fallende Gerade vor. Damit gilt für die Vorzeichentabelle:

x	$x < 2$	$x = 2$	$2 < x$
$G_{f_4''}$	$+$	0	$-$
G_{f_4}	LK↶	WEP	RK↷

Skizze Graph $f_4''(x)$



Demnach ist der Graph von $f_4(x)$ im Intervall $]-\infty; 2]$ linksgekrümmt und im Intervall $[2; \infty[$ rechtsgekrümmt. Bei $x = 2$ liegt ein Wendepunkt vor, dessen Funktionswert durch Einsetzen bestimmt wird:

$$f_4(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 - 9 \cdot 2 - 2 = -4$$

Die Koordinaten des Wendepunktes lauten $\underline{\underline{\text{WEP}\,(2\,|\,-4)}}$.

Um die Gleichung der Wendetangente des Formats $t_w(x) = mx + t$ zu bestimmen, wird zunächst mithilfe der ersten Ableitung die Steigung an dieser Stelle ermittelt:

$$m = f_4'(2) = -3 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 9 = 3$$

Weiterhin werden diese Steigung und die Koordinaten des Wendepunktes in die allgemeine Form eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
& & y &= mx + t & \\
&\Rightarrow & -4 &= 3 \cdot 2 + t & \quad |-6 \\
&\iff & t &= -10 &
\end{aligned}
$$

Die Gleichung der Wendetangente lautet $\underline{\underline{t_w(x) = 3x - 10}}$.