ÜBUNGSTEIL Analysis - FOS12 Technik

Aufgabe 1 - Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS12 MNT 2013, AI 2
Themen: Krümmungsverhalten, Graphische Darstellung

1.0 Von einer ganzrationalen Funktion k mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$ ist folgendes bekannt:

$k''(x) > 0$ für $x \in]-\infty; -2[$ sowie für $x \in]0; \infty[$

$k''(x) < 0$ für $x \in]-2; 0[$

$k'(0) = 0 \wedge k''(0) = 0 \wedge k'''(0) \neq 0$

1.1 Beschreiben Sie die daraus resultierenden Eigenschaften des Graphen G_k in Worten. **5 BE**

1.2 Fertigen Sie mithilfe der bisherigen Angaben und Ergebnisse eine aussagekräftige Skizze von G_k an, wenn der Graph durch den Ursprung verläuft, einen Tiefpunkt bei $x = -3$ besitzt und die Funktion k den Grad 4 hat. **3 BE**

Lösungsvorschlag A1 Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS12 MNT 2013, AI 2

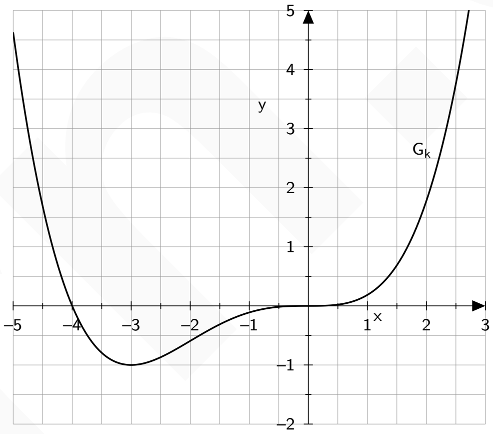
1.0 Untersucht wird das Verhalten einer ganzrationalen Funktion k.

1.1 **Eigenschaften des Funktionsgraphen**

Aus den ersten beiden gegebenen Eigenschaften lässt sich das Krümmungsverhalten von k(x) ableiten. Der Graph G_k von k ist linksgekrümmt für $x \in]-\infty; -2]$ und $x \in [0; \infty[$ und er ist rechtsgekrümmt für $x \in [-2; 0]$. Der letzten gegebenen Eigenschaft kann man entnehmen, dass an der Stelle $x = 0$ ein Terrassenpunkt ist.
Es liegen zwei Wendepunkte bei $x = -2$ und $x = 0$ vor.

1.2 **Skizzieren des Graphen**

Ausgangspunkte der Skizze ist der Ursprung. Hier liegt auch der Terrassenpunkt und der Tiefpunkt bei $x = -3$. Da der Tiefpunkt natürlich tiefer liegt als der Terrassenpunkt, liegt er unterhalb der x-Achse. Die y-Werte in der Skizze sind nicht gefragt und können vernachlässigt werden. Im Tiefpunkt ist der Graph linksgekrümmt, dies stimmt auch mit den gegebenen Eigenschaften überein. Im Punkt $x = -2$ findet ein Krümmungswechsel statt und der Graph ist im Intervall $[-2; 0]$ rechtsgekrümmt. Im Punkt $x = 0$ liegt der Terrassenpunkt und hier findet wieder ein Krümmungswechsel statt und der Graph ist im Intervall $[0; \infty[$ linksgekrümmt.



Aufgabe 2 - Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS13 MNT 2014, AI 1

Themen: Nullstellen, Grenzwert, Monotonie, Wendepunkte, Tangente, Graphische Darstellung, Parameter bestimmen, Fläche

1.0 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \longmapsto \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right) \cdot e^{-0{,}5x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph wird G_f bezeichnet.

1.1 Untersuchen Sie f auf Nullstellen und das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$. **3 BE**

1.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f sowie Art und Koordinaten der Punkte mit horizontalen Tangenten.

Untersuchen Sie G_f auch auf Wendepunkte.

(Teilergebnis: $f'(x) = -\frac{1}{8}x^2e^{-0{,}5x}$) **10 BE**

1.3 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen G_f im Punkt $P(-2\,|\,f(-2))$.
(Ergebnis:$t: y = -0{,}5e \cdot x$) **3 BE**

1.4 Zeichnen Sie G_f und die Tangente aus 1.3 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $-3 \leq x \leq 7$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (1LE=1cm) **5 BE**

1.5.1 Berechnen Sie die reellen Werte von a und b so, dass die Funktion
$F\colon x \longmapsto (-0{,}5x^2 + ax + b) \cdot e^{-0{,}5x}$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f wird.
(Ergebnis: $a = -4$; $b = -12$) **5 BE**

1.5.2 Die Tangente t aus 1.3, der Graph G_f und die y-Achse schließen im II. Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück in der Zeichnung von 1.4 und berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhaltes. **5 BE**

Lösungsvorschlag A2 Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS13 MNT 2014, AI 1

1.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right) \cdot e^{-0,5x}$ mir $D_f = \mathbb{R}$.

1.1 **Nullstellen**

Die e-Funktion nimmt nie den Wert null an. Deshalb entsprechen die Nullstellen der Funktion f den Nullstellen des Terms in der Klammer:

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4}x^2 + x + 2 = 0$$

Lösungsformel:

$$x_{1;2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0,25 \cdot 2}}{2 \cdot 0,25} = \frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{0,5}$$

Da die Diskriminante $D = -1$ unter der Wurzel negativ ist, liegen keine Lösungen vor. Somit besitzt $f(x)$ keine Nullstellen.

Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$

Für das Grenzwertverhalten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ gilt folgendes:

$$x \to -\infty\colon f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right) \cdot e^{-0,5x} = \overbrace{x^2}^{\to\infty} \cdot \overbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}^{\to 0,25} \cdot \overbrace{e^{-0,5x}}^{\to\infty} \to \infty$$

$$x \to +\infty\colon f(x) = \underbrace{\underbrace{\left(\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right)}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{-0,5x}}_{\to 0}}_{\to 0 \text{ da e-Fkt dominiert}} \to 0$$

1.2 Es wird zunächst mithilfe von Ketten-und Produktregel die erste Ableitung gebildet.

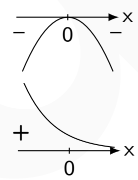
Ermittlung der 1. Ableitung

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right) \cdot e^{-0,5x} \\
f'(x) &= \left[\left(\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right)' \cdot e^{-0,5x} + \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right) \cdot \left(e^{-0,5x}\right)'\right] && \text{(Ansatz Prod.-/Kettenregel)} \\
&= \left(\frac{1}{4} \cdot 2x^1 + 1\right) \cdot e^{-0,5x} + \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right) \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5) && \text{(Anwendung Prod.-/Kettenregel)} \\
&= \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \cdot e^{-0,5x} - 0,5 \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right) e^{-0,5x} && \text{((}e^{-0,5x}\text{) ausklammern)} \\
&= \left(\frac{1}{2}x + 1 - 0,5 \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right)\right) \cdot e^{-0,5x} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= -\frac{1}{8}x^2 e^{-0,5x} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}$$

Ermittlung der Punkte mit waagrechter Tangente
Eine waagrechte oder horizontale Tangente liegt vor, wenn $f'(x) = 0$ ist:

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ & -\frac{1}{8}x^2\, e^{-0,5x} = 0 \\ \Rightarrow\quad & x^2 = 0 \quad \text{oder} \quad \underbrace{e^{-0,5x}}_{>0} = 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & x_{1/2} = 0 \quad [\text{doppelte NST von } f' \quad \Rightarrow \text{TEP bei } x_{1;2} = 0] \end{aligned}$$

Maximale Monotonieintervalle
Es wird eine Monotonietabelle angelegt, um die Art des Punktes mit waagrechter Tangenten sowie die maximalen Monotonieintervalle zu bestimmen.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$	Skizzen
$-\frac{1}{8}x^2$	$-$	0	$-$	
$e^{-0,5x}$	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	
G_f	$\searrow$	TEP	$\searrow$	

Der Graph G_f ist demnach streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$.

Art und Koordinaten des Punktes mit horizontaler Tangente
Wie aus der Tabelle ersichtlich wird, handelt es sich um einen Terassenpunkt. Es wird der Funktionswert an dieser Stelle bestimmt:

$$f(0) = \left(\frac{1}{4} \cdot 0^2 + 0 + 2\right) \cdot e^{-0,5\cdot 0} = 2 \cdot 1 = 2$$

Die Koordinaten des Terassenpunkts lauten TEP $(0\,|\,2)$.

Untersuchung auf Wendepunkte
Zur weiteren Betrachtung wird mithilfe von Produkt- und Kettenregel die zweite Ableitung $f''(x)$ gebildet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{8}x^2 \cdot e^{-0,5x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{8} \cdot \left[(x^2)' \cdot e^{-0,5x} + x^2 \cdot (e^{-0,5x})'\right] && \text{(Ansatz Produkt-/Kettenregel)} \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \left(2 \cdot x^1 \cdot e^{-0,5x} + x^2 \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5)\right) && \text{(Anwendung Produkt-/Kettenregel)} \\ &= -\frac{1}{8} \cdot \left(2x \cdot e^{-0,5x} + x^2 \cdot e^{-0,5x} \cdot (-0,5)\right) && \text{(Ausmultiplizieren)} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4}xe^{-0,5x} + \frac{1}{16}x^2e^{-0,5x} \qquad ((e^{-0,5x}) \text{ ausklammern})$$
$$= \left(\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x\right)e^{-0,5x}$$

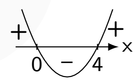
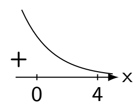
Mögliche Wendestellen entsprechen den Nullstellen der zweiten Ableitung. Da die e-Funktion nie null wird, entspricht dies der Nullstelle des Terms in Klammern. Dafür wird das „Ausklammern“ von x durchgeführt:

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x = 0 \quad \Rightarrow x(\frac{1}{16}x - \frac{1}{4}) = 0 \quad \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{16}x - \frac{1}{4} = 0 \quad \Rightarrow \underline{x_2 = 4}$$

Alternativ werden die möglichen Wendestellen mit der Lösungsformel bestimmt:

$$x_{1;2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{x_1 = 0} \quad \text{oder} \quad \underline{x_2 = 4}$$

Um die genaue Art der Punkte zu bestimmen wird eine Vorzeichentabelle betrachtet:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x$	Skizzen
$\left(\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{4}x\right)$	+	0	−	0	+	
$e^{-0,5x}$	+	+	+	+	+	
$f''(x)$	+	0	−	0	+	
G_f	$\cup$	WEP	$\cap$	WEP	$\cup$	

Die Koordinaten des Wendepunktes bei $x = 0$ sind bekannt, da es sich dabei um den Terassenpunkt handelt. Der Funktionswert bei $x = 4$ wird bestimmt:

$$f(4) = \left(\frac{1}{4} \cdot 4^2 + 4 + 2\right) \cdot e^{-0,5 \cdot 4} = 10e^{-2}$$

Die Koordinaten der Wendepunkte lauten $\underline{\underline{WEP_1\,(0\,|\,2)}}$ und $\underline{\underline{WEP_2\,(4\,|\,10e^{-2})}}$.

1.3 **Bestimmung der Tangentengleichung**

Funktionswert an der Stelle $x = -2$:

$$f(-2) = \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^2 - 2 + 2\right) \cdot e^{-0,5 \cdot (-2)} = 1 \cdot e^1 = e$$

Über den Wert der Ableitung an dieser Stelle wird die Steigung m der Tangente t ermittelt:

$$m = f'(-2) = -\frac{1}{8}(-2)^2\, e^{-0,5 \cdot (-2)} = -\frac{1}{2}\,e$$

Die Koordinaten des Punktes P und die ermittelte Steigung werden in die Punkt-Steigungs-Form eingesetzt:

$$y = m \cdot (x - x_P) + y_P = -\frac{1}{2}e \cdot (x - (-2)) + e = -\frac{1}{2}e \cdot x - e + e = \frac{1}{2}e \cdot x$$

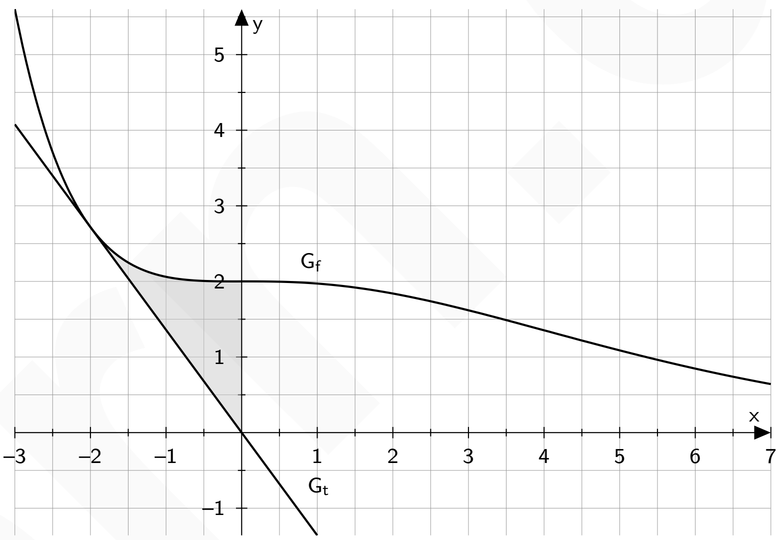
Die gesuchte Tangente ergibt sich somit als $\underline{\underline{t(x) = -\frac{1}{2}\,e \cdot x}}$.

1.4 Die Zeichnung soll folgende Elemente enthalten:

- Graph G_f mit $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 2\right) \cdot e^{-0{,}5x}$
- Graph G_t der Tangente mit $t(x) = -\frac{1}{2}e \cdot x$

Mithilfe bereits bekannter Punkte und der Berechnung weiterer Koordinaten wird eine optionale Wertetabelle erstellt:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	5,6	2,7	2,1	2	2	1,8	1,6	1,4	1,1	0,8	0,6



1.5.1 **Bestimmung von** a **und** b

Da F eine Stammfunktion von f sein soll, muss die Bedingung $F'(x) = f(x)$ erfüllt sein. Es wird also F mithilfe der Ketten- und Produktregel abgeleitet:

$$F(x) = (-0{,}5x^2 + ax + b) \cdot e^{-0{,}5x}$$

$$F'(x) = \left[(-0{,}5x^2 + ax + b)' \cdot e^{-0{,}5x} + (-0{,}5x^2 + ax + b) \cdot (e^{-0{,}5x})'\right] \quad \text{(Ansatz Prod.-/Kettenreg.)}$$

$$= (2 \cdot (-0{,}5x^1) + a)\, e^{-0{,}5x} + (-0{,}5x^2 + ax + b)\, e^{-0{,}5x} \cdot (-0{,}5) \quad \text{(Anwend. Prod.-/Kettenreg.)}$$

$$= (-x + a)\, e^{-0{,}5x} + (-0{,}5x^2 + ax + b)\, e^{-0{,}5x} \cdot (-0{,}5) \quad \text{(Ausmultiplizieren)}$$

$$= (-x + a)\, e^{-0{,}5x} + (0{,}25x^2 - 0{,}5ax - 0{,}5b)\, e^{-0{,}5x} \quad \text{((}e^{-0{,}5x}\text{) Ausklammern)}$$

$$= (-x + a + 0{,}25x^2 - 0{,}5ax - 0{,}5b)\, e^{-0{,}5x} \qquad \text{(Zusammenfassen)}$$
$$= (0{,}25x^2 + (-1 - 0{,}5a)x + a - 0{,}5b)\, e^{-0{,}5x}$$

Nun müssen die einzelnen Leitkoeffizienten von F(x) und f(x) gleich gesetzt werden (Koeffizientenvergleich):

	f(x)	F′(x)	Übereinstimmung
Koeffizient vor x^2	0,25	0,25	Richtig
Koeffizient vor x	1	$-1 - 0{,}5a$	wenn $a = -4$
Dritter Summand (Konstante)	2	$a - 0{,}5b$	wenn $b = -12$

Es ist also $\underline{\underline{a = -4}}$ und $\underline{\underline{b = -12}}$, also $F(x) = (0{,}5x^2 - 4x - 12) \cdot e^{-0{,}5x}$.

1.5.2 **Berechnung des markierten Flächenstücks aus der Zeichnung von 1.4**

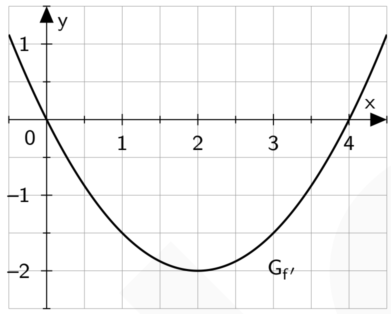
Sei $A_\triangle$ die Dreiecksfläche unterhalb der Tangente t für $x \in [-2; 0]$ (Länge der Grundseite ist 2). Zur Berechnung der markierten Fläche wird die Stammfunktion F von f aus Aufgabe 1.5.1 verwendet. Da die Tangente t die Funktion f bei $x = -2$ und die y-Achse bei $x = 0$ berührt bzw. schneidet gilt:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} f(x)\,dx - A_\triangle = [F(x)]_{-2}^{0} - A_\triangle \\
&= \left[\left(0{,}5x^2 - 4x - 12\right) \cdot e^{-0{,}5x}\right]_{-2}^{0} - A_\triangle \\
&= \left(-0{,}5 \cdot (0)^2 - 4 \cdot 0 - 12\right) e^{-0{,}5 \cdot 0} - \left(-0{,}5 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 12\right) e^{-0{,}5 \cdot (-2)} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e \\
&= -12 + 6e - e \\
&= \underline{\underline{5e - 12\,[FE]}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 - Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS12 MNT 2015, AI 1

Themen: Monotonie, Wendestelle, Funktionsterm aufstellen, Nullstellen, Extrempunkte, Graphische Darstellung, Fläche

1.0 Nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion einer in ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f dritten Grades. Alle im Folgenden zu entnehmenden Werte sind ganzzahlig.



1.1 Geben Sie nur mithilfe des Graphen $G_{f'}$ die maximalen Monotonieintervalle und die Wendestelle des Graphen der Funktion f an. Begründen Sie das Vorliegen der Wendestelle hinreichend. **6 BE**

1.2 Bestimmen Sie ausgehend vom Graphen $G_{f'}$ den Funktionsterm $f'(x)$ und dann den Funktionsterm $f(x)$ für den Fall, dass G_f den Ursprung enthält.
[Mögliches Teilergebnis: $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2)$]. **5 BE**

1.3 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit der jeweiligen Vielfachheit und ermitteln Sie unter Verwendung vorliegender Ergebnisse Art und Koordinaten der Extrempunkte und den Wendepunkt des Graphen G_f. **6 BE**

1.4 Zeichnen Sie die Graphen der Funktion f und f' im Bereich $-2 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. **5 BE**

1.5 Berechnen Sie die Maßzahl des im 4. Quadranten liegenden endlichen Flächenstücks, das nur von den Graphen G_f und $G_{f'}$ begrenzt wird und runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. **7 BE**

Lösungsvorschlag A3 Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS12 MNT 2015, AI 1

1.0 Untersucht wird eine Funktion f dritten Grades, für die der Graph der Ableitung f' in der Abbildung zu sehen ist.

1.1 **Maximale Monotonieintervalle**

Grundsätzlich ist der Graph einer Funktion streng monoton steigend, wenn die Ableitung größer null ist (anschaulich: wenn der Graph der Ableitung oberhalb der x-Achse liegt) und streng monoton fallend, wenn die Ableitung kleiner null ist (anschaulich: wenn der Graph der Ableitung unterhalb der x-Achse liegt). Aus der gegebenen Graphik können die entsprechenden Intervalle abgelesen werden.

Da der Graph von f' bei $x = 0$ und $x = 4$ jeweils eine Nullstelle besitzt, ist der Graph von f streng monoton steigend für $x \in]-\infty; 0] \cup [4; \infty[$, da $G_{f'}$ in diesen Intervallen oberhalb der x-Achse liegt. Der Graph von f ist ferner streng monoton fallend für $x \in [0; 4]$, da $G_{f'}$ in diesem Intervall unterhalb der x-Achse liegt.

Wendestelle

G_f hat bei $x = 2$ eine Wendestelle, da $G_{f'}$ bei $x = 2$ einen Extrempunkt besitzt.

1.2 **Ermitteln der Funktionsterme**

Da es sich beim Term der ersten Ableitung um eine quadratische Funktion handelt und aufgrund der Nullstellen von f' bei $x = 0$ und $x = 4$ lässt sich folgender Term aufstellen (Faktorform):

$$f(x) = a(x-4)x$$

Einsetzen der Koordinaten des Punktes $S\,(2\,|-2)$ ergibt:

$$\begin{aligned} & -2 = a(2-4)\cdot 2 & \\ \iff\quad & -2 = -4a & \quad |:(-4) \\ \iff\quad & a = \frac{1}{2} & \end{aligned}$$

Der Funktionsterm von f' lautet also $\underline{\underline{f'(x) = \frac{1}{2}(x-4)x = \frac{1}{2}x^2 - 2x}}$.

Um den Funktionsterm von f zu bestimmen, bildet man eine Stammfunktion von f' (Integration):

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + c = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2) + c$$

Beachtet man noch, dass G_f den Ursprung enthält (d. h. das Konstante Glied c entfällt), so lautet der Funktionsterm von f also $\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2)}}$.

1.3 **Nullstellen mit Vielfachheit**

Um die Nullstellen von f zu bestimmen, muss folgende Gleichung betrachtet werden:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0 \\
\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2) &= 0 \qquad | \cdot 6 \\
\Longleftrightarrow \quad x^3 - 6x^2 &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad x^2(x-6) &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad x^2 &= 0 \quad \text{oder} \quad x - 6 = 0
\end{aligned}
$$

Aus dem ersten Fall ergibt sich aufgrund des Quadrats eine doppelte Nullstelle $\underline{\underline{x_{1;2} = 0}}$. Aus dem zweiten Fall ergibt sich eine einfache Nullstelle zu $\underline{\underline{x_3 = 6}}$.

Art und Koordinaten der Extrempunkte

Um die Extrempunkte zu ermitteln, werden die Nullstellen der Ableitung f' benötigt. Diese sind in Aufgabe 1.1 bereits abgelesen worden. An der Stelle $x = 0$ handelt es sich um einen Hochpunkt von f, da hier eine einfache Nullstelle der ersten Ableitung vorliegt und das Vorzeichen der ersten Ableitung von „+“ nach „-“ wechselt. Eine analoge Überlegung führt dazu, dass an der Stelle $x = 4$ ein Tiefpunkt von f vorliegt, da hier eine einfache Nullstelle der ersten Ableitung vorliegt und das Vorzeichen der ersten Ableitung von „-“ nach „+“ wechselt. Einsetzen der x-Werte ergibt die zugehörigen y-Werte:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= \frac{1}{6}(0^3 - 6 \cdot 0^2) = 0 \\
f(4) &= \frac{1}{6}(4^3 - 6 \cdot 4^2) = \frac{1}{6}(64 - 96) = \frac{-32}{6} = -\frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

Die Koordinaten der Extrempunkte lauten $\underline{\underline{HOP\,(0\,|\,0)}}$ und $\underline{\underline{TIP\,\left(4\,\middle|\,-\frac{16}{3}\right)}}$.

Wendepunkt

Der Wendepunkt liegt nach Aufgabe 1.1 bei $x = 2$ und besitzt die y-Koordinate

$$
f(2) = \frac{1}{6}(2^3 - 6 \cdot 2^2) = -\frac{8}{3}
$$

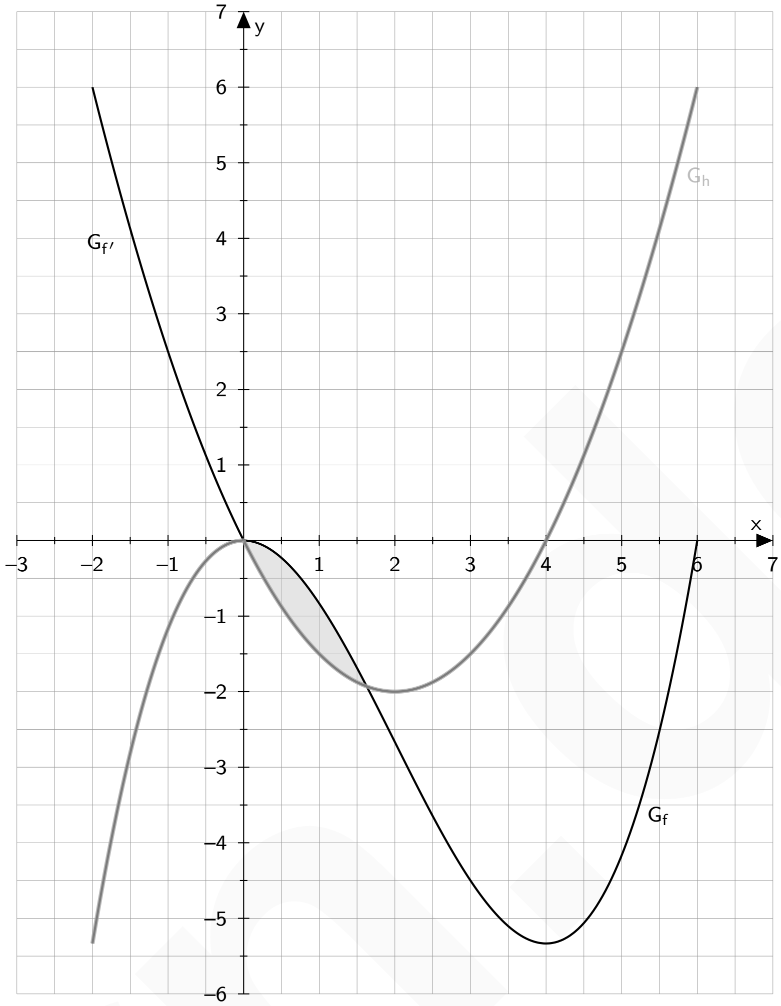
Die Koordinaten des Wendepunktes lauten demnach $\underline{\underline{WEP\,\left(2\,\middle|\,-\frac{8}{3}\right)}}$.

1.4 **Graphische Darstellung**

Es wird zunächst eine Wertetabelle für f erstellt:

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	–5,33	–1,17	0	–0,83	–2,67	–4,5	–5,33	–4,17	0

Es ist zu beachten, die Nullstelle $x = 0$ eine doppelte Nullstelle ist, d. h. der Graph von f berührt an dieser Stelle die x-Achse nur und schneidet sie nicht (Hinweis: Markierung des Flächenstücks nicht gefordert).



1.5 Das Flächenstück wurde zur Veranschaulichung in der Zeichnung grau markiert.

Maßzahl des markierten Flächenstücks
Zunächst werden die x-Werte der beiden Schnittpunkte benötigt, die den Integrationsgrenzen entsprechen. Gleichsetzen und Umformen ergibt:

$$
\begin{aligned}
& & f'(x) &= f(x) & \\
&\iff & \frac{1}{2}x^2 - 2x &= \frac{1}{6}(x^3 - 6x^2) & \mid \cdot 6 \\
&\iff & 3x^2 - 12x &= x^3 - 6x^2 & \mid -x^3 + 6x^2 \\
&\iff & -x^3 + 9x^2 - 12x &= 0 & \\
&\iff & -x(x^2 - 9x + 12) &= 0 & \\
&\iff & -x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 9x + 12 &= 0 &
\end{aligned}
$$

Der erste Schnittpunkt liegt also bei $x_1 = 0$. Die beiden anderen Lösungen ergeben sich mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 9x + 12 &= 0 \\
\Rightarrow \qquad x_{2,3} &= \frac{9 \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} \\
\Longleftrightarrow \qquad x_{2,3} &= \frac{9 \pm \sqrt{33}}{2} \\
\Longleftrightarrow \qquad x_2 = 7{,}37 \quad &\text{oder} \quad x_3 = 1{,}63
\end{aligned}
$$

Der Schnittpunkt bei $x = 7{,}37$ entfällt (Vergleich graphische Darstellung). Das Flächenstück wird also begrenzt durch die beiden Werte $x = 0$ und $x = 1{,}63$. Für die markierte Fläche wird zunächst der Term einer Differenzfunktion gesucht und dessen Stammfunktion gebildet:

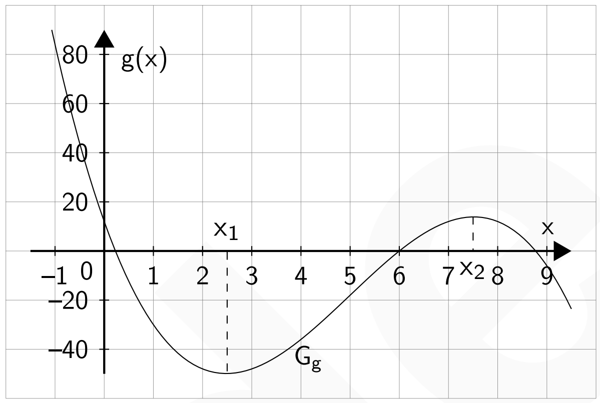
$$
\begin{aligned}
h(x) &= [\text{„oberer Graph“-„unterer Graph“}] \\
&= f(x) - f'(x) \\
&= \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \\
\Rightarrow \qquad H(x) &= \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2
\end{aligned}
$$

Damit gilt für die Fläche:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{1{,}63} h(x)dx = [H(x)]_0^{1{,}63} \\
&= H(1{,}63) - H(0) = \frac{1}{24} \cdot (1{,}63)^4 - \frac{1}{2} \cdot 1{,}63^3 + 1{,}63^2 - \left(\frac{1}{24} \cdot 0^4 - \frac{1}{2} \cdot 0^3 + 0^2\right) \\
&\approx \underline{\underline{0{,}79\,[FE]}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4 - Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS12 MNT 2017, AI 1
Themen: Graphische Darstellung, Monotonie, Parameter bestimmen

1.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion g dritten Grades mit $D_g = \mathbb{R}$, deren Graph G_g in nebenstehender Abbildung dargestellt ist.
Vom Graphen sind folgende Eigenschaften bekannt:
G_g hat bei der Nullstelle $x = 6$ eine Tangente G_t mit $t : y = 16x - 96$ mit $x \in \mathbb{R}$ und besitzt den Wendepunkt $W(5\,|-18)$.



1.1 Skizzieren Sie den Graphen $G_{g'}$ der 1. Ableitungsfunktion von g in ein geeignetes Koordinatensystem und geben Sie die max. Monotonieintervalle der 1. Ableitungsfunktion g' an. **5 BE**

1.2.0 Zur Bestimmung des Funktionsterms $g(x)$ ist folgendes Gleichungssystem gegeben:

(I) $216a + 36b + 6c + d = 0$
(II) $125a + 25b + 5c + d = -18$
(III) $108a + 12b + c = 16$
(IV) $30a + 2b = 0$

1.2.1 Geben Sie nachvollziehbar an, welche Ansätze zu diesen Gleichungen führen. **4 BE**

1.2.2 Bestimmen Sie $g(x)$ mithilfe der Gleichungen aus 1.2.0. **7 BE**

Lösungsvorschlag A4 Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS12 MNT 2017, AI 1

1.0 Gegeben ist die ganzrationale Funktion g dritten Grades mit $D_g = \mathbb{R}$, deren Graph in der Abbildung gezeigt ist. Der Graph hat eine Tangente G_t bei der Nullstelle $x = 6$ mit $t\colon y = 16x - 96$ mit $x \in \mathbb{R}$ und den Wendepunkt $W(5 \mid -18)$.

1.1 **Aussagen zu $G_{g'}$**

Für die Skizze der 1. Ableitungsfunktion können einige Kriterien aus der Zeichnung und den gegebenen Punkten abgelesen werden:

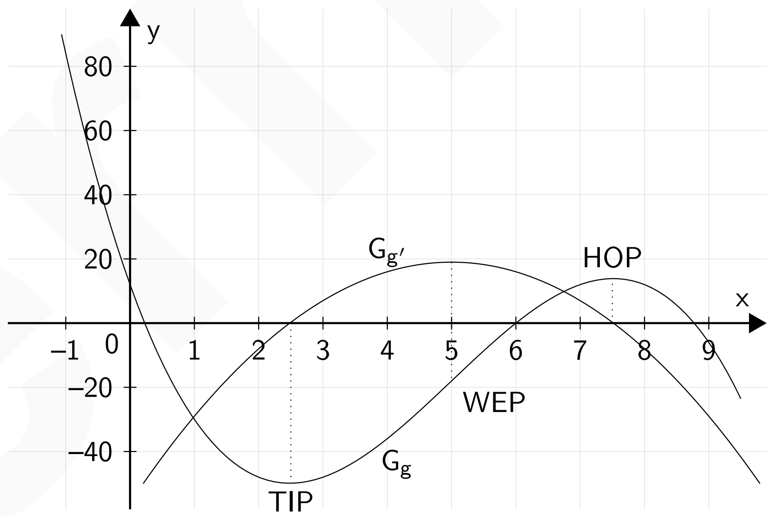
- g(x) ist dritten Grades, die Ableitungsfunktion ist demnach zweiten Grades, also eine Parabel
- g(x) ist zunächst fallend, dann steigend und schließlich wieder fallend; entsprechend handelt es sich bei der Ableitung um eine nach unten geöffnete Parabel
- die Extremstellen von g(x) können aus der Grafik ungefähr zu $x_1 \approx 2{,}5$ und $x_2 \approx 7{,}5$ abgelesen werden und entsprechen den Nullstellen der Ableitung
- der Wendepunkt von g(x) liegt bei $x = 5$, weshalb auch das Maximum und damit der Scheitelpunkt der Ableitung bei $x = 5$ liegt.

Maximale Monotonieintervalle der 1. Ableitungsfunktion

Entsprechend den gefunden Kriterien nimmt die Funktion streng monoton zu im Intervall $]-\infty; 5]$ und streng monoton ab in $[5; \infty[$.

Graphische Darstellung

Graphische Darstellung der ersten Ableitungsfunktion:



1.2.1 **Begründung der Gleichungen des Gleichungssystems**

Es handelt sich um eine Funktion dritten Grades, weshalb für die allgemeine Form gilt:

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$g''(x) = 2 \cdot 3ax + 2b = 6ax + 2b$$

Aus dem Text können dann jeweils verschiedene Punkte oder Kriterien abgelesen werden, aus denen man die Gleichung aufstellen kann:

Laut Angabe hat die Funktion $g(x)$ eine Nullstelle bei $x = 6$:

$$\begin{aligned} & g(6) = 0 \\ \iff \quad & 6^3a + 6^2b + 6c + d = 0 \\ \iff \quad & 216a + 36b + 6c + d = 0 \qquad \text{(I)} \end{aligned}$$

Die Funktion hat einen Wendepunkt $W\,(5\,|-18)$. Daraus können zwei Bedingungen gewonnen werden. Zunächst verläuft die Funktion durch den Punkt $(5\,|-18)$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} & g(5) = -18 \\ \iff \quad & 5^3a + 5^2b + 5c + d = -18 \\ \iff \quad & 125a + 25b + 5c + d = -18 \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

Weiterhin folgt daraus, dass die Funktion bei $x = 5$ eine Wendestelle hat, an dieser Stelle also die zweite Ableitung eine Nullstelle hat:

$$\begin{aligned} & g''(5) = 0 \\ \iff \quad & 6 \cdot 5a + 2b = 0 \\ \iff \quad & 30a + 2b = 0 \qquad \text{(IV)} \end{aligned}$$

Die Steigung der Tangente an einen Punkt des Graphen entspricht der Steigung der Funktion an dieser Stelle. Diese wiederum entspricht der ersten Ableitung. Die Tangente t tangiert den Graph bei $x = 6$ und hat eine Steigung von $m_t = 16$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} & g'(6) = 16 \\ \iff \quad & 3 \cdot 6^2a + 2 \cdot 6b + c = 16 \\ \iff \quad & 108a + 12b + c = 16 \qquad \text{(III)} \end{aligned}$$

1.2.2 Lösung des Gleichungssystems

1. Variante: Umformen der gegebenen Gleichungen

Zunächst wird Gleichung (IV) umgeformt:

$$\begin{aligned} \text{(IV)} \quad & 30a + 2b = 0 \qquad & |-30a \\ \iff \quad & 2b = -30a \qquad & |:2 \\ \iff \quad & b = -15a \end{aligned}$$

Dies kann nun in Gleichung (III) eingesetzt werden:

$$\text{(III)} \qquad 108a + 12b + c = 16$$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow\quad & 108a + 12\cdot(-15a) + c = 16 \\
\Longleftrightarrow\quad & 108a - 180a + c = 16 && \mid +72a \\
\Longleftrightarrow\quad & c = 16 + 72a
\end{aligned}
$$

Als nächstes kann Gleichung (II) von Gleichung (I) subtrahiert werden:

$$
\begin{aligned}
\text{(I)} - \text{(II)}\quad & 216a + 36b + 6c + d - (125a + 25b + 5c + d) = 0 - (-18) \\
\Longleftrightarrow\quad & 91a + 11b + c = 18
\end{aligned}
$$

In diesen Ausdruck können nun die oben bestimmten Ausdrücke für a und b eingesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
& 91a + 11b + c = 18 \\
\Longleftrightarrow\quad & 91a + 11\cdot(-15a) + (16 + 72a) = 18 \\
\Longleftrightarrow\quad & 91a - 165a + 16 + 72a = 18 && \mid -16 \\
\Longleftrightarrow\quad & -2a = 2 && \mid :(-2) \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{a = -1}
\end{aligned}
$$

Daraus folgt aus den obigen Umformungen direkt:

$$\underline{b} = -15a = -15\cdot(-1) = \underline{15} \qquad \underline{c} = 16 + 72a = 16 + 72\cdot(-1) = \underline{-56}$$

Die ermittelten Werte für a, b und c können nun in Gleichung (I) eingesetzt werden, um schließlich d zu bestimmen:

$$
\begin{aligned}
\text{(I)}\quad & 216a + 36b + 6c + d = 0 && \mid -d \\
\Longleftrightarrow\quad & 216\cdot(-1) + 36\cdot 15 + 6\cdot(-56) = -d \\
\Longleftrightarrow\quad & -12 = -d && \mid \cdot(-1) \\
\Longleftrightarrow\quad & \underline{d = 12}
\end{aligned}
$$

<u>*2. Variante:* Gauß-Algorithmus</u>
Für die Lösung des Gleichungssystems wird der Gauß-Algorithmus verwendet:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|c}
216 & 36 & 6 & 1 & 0 \\
125 & 25 & 5 & 1 & -18 \\
108 & 12 & 1 & 0 & 16 \\
30 & 2 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Tauschen der Spalten

$$
\Rightarrow\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} d & c & b & a \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 6 & 36 & 216 & 0 \\
1 & 5 & 25 & 125 & -18 \\
0 & 1 & 12 & 108 & 16 \\
0 & 0 & 2 & 30 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II}' \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 36 & 216 & 0 \\ 0 & -1 & -11 & -91 & -18 \\ 0 & 1 & 12 & 108 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 30 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{II} - \text{I}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II}' \\ \text{III}' \\ \text{IV} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 36 & 216 & 0 \\ 0 & -1 & -11 & -91 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 30 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{III} + \text{II}'$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II}' \\ \text{III}' \\ \text{IV}' \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 36 & 216 & 0 \\ 0 & -1 & -11 & -91 & -18 \\ 0 & 0 & -1 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \qquad \text{IV} - 2 \cdot \text{III}'$$

Aus Zeile IV' folgt:

$$\begin{aligned} & -4a = 4 && | : (-4) \\ \iff \quad & \underline{a = -1} \end{aligned}$$

Der Wert von a eingesetzt in III':

$$\begin{aligned} & b + 17 \cdot (-1) = -2 && | + 17 \\ \iff \quad & \underline{b = 15} \end{aligned}$$

Die Werte von a und b eingesetzt in II':

$$\begin{aligned} & -c - 11 \cdot 15 - 91 \cdot (-1) = -18 \\ \iff \quad & -c - 165 + 91 = -18 && | + 74 \\ \iff \quad & -c = 56 && | \cdot (-1) \\ \iff \quad & \underline{c = -56} \end{aligned}$$

Die Werte von a, b und c eingesetzt in I:

$$\begin{aligned} & d + 6 \cdot (-56) + 36 \cdot 15 + 216 \cdot (-1) = 0 \\ \iff \quad & d - 336 + 540 - 216 = 0 && | + 12 \\ \iff \quad & \underline{d = 12} \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet demnach $\underline{\underline{g(x) = -x^3 + 15x^2 - 56x + 12}}$.

Aufgabe 5 - Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS12 MNT 2017, AII 1
Themen: Funktionsterm aufstellen, Nullstellen, Monotonie, Extrempunkte, Wendepunkte, Graphische Darstellung, Fläche

1.0 Der Graph G_f einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades mit $D_f = \mathbb{R}$ ist symmetrisch zur y-Achse und hat einen Wendepunkt $W_1\,(1\,|\,2{,}5)$. Die Tangente G_t im Punkt W_1 besitzt die Gleichung $t: y = 4x - 1{,}5$ mit $x \in \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x).
[Mögliches Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{2}(x^4 - 6x^2)$] **7 BE**

1.2 Ermitteln Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f und deren Vielfachheit. Erklären Sie die Bedeutung der Vielfachheit dieser Nullstellen für den Graphen G_f. **5 BE**

1.3 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f. **8 BE**

1.4 Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph G_f genau zwei Wendepunkte besitzt und geben Sie die Koordianten des zweiten Wendepunkts an. Berechnen Sie auch die x-Koordinaten sämtlicher Punkte von G_f, welche die gleichen y-Koordinaten wie die Wendepunkte haben. **7 BE**

1.5 Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen G_f im Bereich $-2{,}5 \leq x \leq 2{,}5$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Für weitere Teilaufgaben wird auf der y-Achse der Bereich $-5 \leq y \leq 5$ benötigt.
Maßstab: 1 LE = 1 cm. **5 BE**

1.6 Zeigen Sie, dass an der Stelle $x = -2$ die Gleichung $f(x) - f'(x) = 0$ gilt und bestimmen Sie alle weiteren Stellen mit dieser Eigenschaft. Erklären Sie, was das Ergebnis für den Graphen G_f bedeutet. **7 BE**

1.7 Geben Sie exakt die Nullstellen und die Extremstellen der ersten Ableitungsfunktion f' an und zeichnen Sie den Graphen $G_{f'}$ im Bereich $-2 \leq x \leq 2$ in das vorhandene Koordinatensystem mit Farbe ein. **4 BE**

1.8 Die Graphen G_f und $G_{f'}$ schließen ein endliches Flächenstück ein, das im II. und III. Quadranten des Koordinatensystems liegt.
Markieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. **5 BE**

Lösungsvorschlag A5 Kurvendiskussion/Steckbriefaufgabe: FOS12 MNT 2017, AII 1

1.0 Gegeben ist eine ganzrationale Funktion f vierten Grades mit $D_f = \mathbb{R}$, deren Graph symmetrisch zur y-Achse verläuft und einen Wendepunkt $W_1\,(1\,|\,2{,}5)$ besitzt. Die Tangente in diesem Punkt W_1 besitzt die Gleichung $t\colon\ y = 4x - 1{,}5$ mit $x \in \mathbb{R}$.

1.1 **Bestimmen des Funktionsterms**

Eine allgemeine Funktion vierten Grades besitzt die Form $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Da die Funktion symmetrisch zur y-Achse ist, entfallen allerdings alle ungeraden Exponenten, sodass sich die allgemeine Form auf $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ reduziert. Damit gilt allgemein weiterhin:

$$f'(x) = 4ax^3 + 2cx \qquad \Longleftrightarrow \qquad f''(x) = 3 \cdot 4ax^2 + 2c = 12ax^2 + 2c$$

Die Funktion hat den Wendepunkt $W\,(1\,|\,2{,}5)$. Daraus ergeben sich zwei Bedingungen. Zum einen verläuft sie also durch den Punkt $(1\,|\,2{,}5)$:

$$\begin{aligned} && f(1) &= 2{,}5 \\ \Longleftrightarrow && 1^4a + 1^2c + e &= 2{,}5 \\ \Longleftrightarrow && a + c + e &= 2{,}5 \qquad \text{(I)} \end{aligned}$$

Weiterhin besitzt sie also die Wendestelle $x = 1$, die zweite Ableitung hat an dieser Stelle also eine Nullstelle:

$$\begin{aligned} && f''(1) &= 0 \\ \Longleftrightarrow && 12 \cdot 1^2a + 2c &= 0 \\ \Longleftrightarrow && 12a + 2c &= 0 \qquad \text{(II)} \end{aligned}$$

Eine dritte Bedingung ist gegeben durch die Tangente. Die Steigung der Tangente $m_t = 4$ an den Punkt W_1 entspricht der Steigung der Funktion $f(x)$ an dieser Stelle und damit dem Wert der ersten Ableitung $f'(x)$ an dieser Stelle:

$$\begin{aligned} && f'(1) &= 4 \\ \Longleftrightarrow && 4 \cdot 1^3a + 2 \cdot 1c &= 4 \\ \Longleftrightarrow && 4a + 2c &= 4 \qquad \text{(III)} \end{aligned}$$

Um das aus den Gleichungen I, II und III resultierende Gleichungssystem zu lösen gibt es verschiedene Möglichkeiten.

<u>*1. Möglichkeit:* Umformen der Gleichungen</u>

Zunächst wird nun Gleichung (II) umgeformt:

$$\begin{aligned} && 12a + 2c &= 0 && \mid -12a \\ \Longleftrightarrow && 2c &= -12a && \mid :2 \\ \Longleftrightarrow && c &= -6a \end{aligned}$$

Dieser Wert kann nun in Gleichung (III) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} && 4a + 2c &= 4 & \\ \Longleftrightarrow && 4a + 2 \cdot (-6a) &= 4 & \\ \Longleftrightarrow && -8a &= 4 & \quad | : (-8) \\ \Longleftrightarrow && \underline{a = -\frac{1}{2}} & & \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nach obiger Bedingung direkt ein Wert für c:

$$\underline{c} = -6a = -6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \underline{3}$$

Die Werte für a und c werden nun in Gleichung (I) eingesetzt um einen Wert für e zu bestimmen:

$$\begin{aligned} && a + c + e &= 2{,}5 & \\ \Longleftrightarrow && -\frac{1}{2} + 3 + e &= 2{,}5 & \quad | -2{,}5 \\ \Longleftrightarrow && \underline{e = 0} & & \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Gauß-Algorithmus

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{I} \quad a + c + e &= 2{,}5 \\ \text{II} \quad 12 + 2c &= 0 \\ \text{III} \quad 4a + 2c &= 4 \end{aligned}$$

wird mithilfe des Gauß-Algorithmus gelöst:

$$\begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & c & e \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2{,}5 \\ 12 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \Rightarrow \text{II}' \\ \text{III}' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2{,}5 \\ 0 & -10 & -12 & -30 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \\ \text{II} - 12 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 4 \cdot \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \Rightarrow \\ \text{III}'' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2{,}5 \\ 0 & -10 & -12 & -30 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \\ \\ 5 \cdot \text{III}' - \text{II}' \end{array}$$

Aus Zeile III'' folgt:

$$\begin{aligned} && -8e &= 0 & \quad | : (-8) \\ \Longleftrightarrow && \underline{e = 0} & & \end{aligned}$$

Einsetzen von e in II':

$$\begin{aligned} && -10c - 12 \cdot 0 &= -30 \\ \Longleftrightarrow && -10c &= -30 \qquad \mid : (-10) \\ \Longleftrightarrow && \underline{c} &\underline{= 3} \end{aligned}$$

Einsetze von c und e in I:

$$\begin{aligned} && a + 3 + 0 &= 2{,}5 \qquad \mid -3 \\ \Longleftrightarrow && \underline{a} &\underline{= -\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet also $f(x) = a \cdot x^4 + c \cdot x^2 + e = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}(x^4 - 6x^2)}}$.

1.2 Nullstellen und deren Vielfachheit

Um die Nullstellen zu finden, wird der Funktionsterm umgeformt:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^4 - 6x^2) = -\frac{1}{2}x^2(x^2 - 6)$$

Für die Nullstellen gilt nun:

$$\begin{aligned} && f(x) &= 0 \\ \Longleftrightarrow && -\frac{1}{2}x^2(x^2 - 6) &= 0 \\ \Rightarrow && -\frac{1}{2}x^2 &= 0 \quad \text{oder } x^2 - 6 = 0 \end{aligned}$$

Im ersten Fall liegt bei $\underline{\underline{x_{1;2} = 0}}$ eine doppelte Nullstelle, da x als Faktor quadriert wird. Eine doppelte Nullstelle zeigt an, dass der Graph an dieser Stelle die x-Achse berührt, jedoch nicht schneidet. Weitere Nullstellen ergeben sich aus dem zweiten Fall:

$$\begin{aligned} && x^2 - 6 &= 0 \qquad \mid +6 \\ \Longleftrightarrow && x^2 &= 6 \qquad \mid \sqrt{} \\ \Longleftrightarrow && x_{3;4} &= \pm\sqrt{6} \end{aligned}$$

Demnach existieren noch die zwei einfachen Nullstellen $\underline{\underline{x_3 = -\sqrt{6}}}$ und $\underline{\underline{x_4 = \sqrt{6}}}$. An einer einfachen Nullstelle schneidet der Funktionsgraph die x-Achse.

1.3 Maximale Monotonieintervalle und Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte

Zunächst wird die erste Ableitung der Funktion bestimmt:

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x^4 - 6x^2)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(4x^3 - 2 \cdot 6x) = -2x^3 + 6x = x(-2x^2 + 6)$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung entsprechen nun den möglichen Extremstellen der Funktion:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ x(-2x^2 + 6) &= 0 \\ x = 0 \quad \text{oder} \quad -2x^2 + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Die erste Nullstelle $x_1 = 0$ kann direkt abgelesen werden. Für die weiteren Nullstellen gilt:

$$\begin{aligned} & & -2x^2 + 6 &= 0 & & \mid +2x^2 \\ &\iff & 6 &= 2x^2 & & \mid :2 \\ &\iff & 3 &= x^2 & & \mid \sqrt{\ } \\ &\iff & x_{2;3} &= \pm\sqrt{3} & & \end{aligned}$$

Die erste Ableitung hat also die Nullstellen $x = 0$ und $x = \pm\sqrt{3}$. Um Aussagen über deren Art treffen zu können, werden 2 verschieden Möglichkeiten betrachtet:

<u>*1. Möglichkeit:* Mithilfe der 2. Ableitung</u>
Es wird die zweite Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x^3 + 6x \\ f''(x) &= -2 \cdot 3 \cdot x^2 + 6 = -6x^2 + 6 \end{aligned}$$

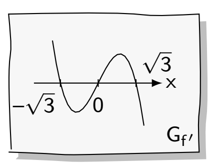
In den Term der zweiten Ableitung werden die Werte der möglichen Extremstelle eingesetzt:

$$\begin{aligned} f''(-\sqrt{3}) &= -6 \cdot (-\sqrt{3})^2 + 6 = -6 \cdot 3 + 6 = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HOP} \\ f''(0) &= -6 \cdot 0^2 + 6 = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TIP} \\ f''(\sqrt{3}) &= -6 \cdot (\sqrt{3})^2 + 6 = -6 \cdot 3 + 6 = -12 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HOP} \end{aligned}$$

<u>*2. Möglichkeit:* Mithilfe einer Skizze der 1. Ableitung</u>

Alternativ kann mithilfe einer Skizze des Graphs der ersten Ableitung (siehe nebenstehende Skizze) über die Art der Extrema entschieden werden:

Skizze



	$x < -\sqrt{3}$	$x = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$x = \sqrt{3}$	$\sqrt{3} < x$
$G_{f'}$	+	0	−	0	+	0	−
G_f	↗	HOP	↘	TIP	↗	HOP	↘

Der Graph der Funktion $f(x)$ ist somit streng monoton steigend auf $\left]-\infty; -\sqrt{3}\right]$ und $\left[0; \sqrt{3}\right]$ und streng monoton fallend auf $\left[-\sqrt{3}; 0\right]$ und $\left[\sqrt{3}; \infty\right[$. Es müssen weiterhin die Funktionswerte an den Extremstellen ermittelt werden. Laut Teilaufgabe 1.1 ist $f(0) = 0$. Weiterhin gilt:

$$f(\pm\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}((\pm\sqrt{3})^4 - 6(\pm\sqrt{3})^2) = -\frac{1}{2}(9 - 6 \cdot 3) = -\frac{1}{2} \cdot (-9) = \frac{9}{2}$$

Die Koordinaten der Extrempunkte lauten $\underline{\underline{HOP_1\left(-\sqrt{3}\,\middle|\,\frac{9}{2}\right)}}$, $\underline{\underline{TIP\,(0\,|\,0)}}$ und $\underline{\underline{HOP_2\left(\sqrt{3}\,\middle|\,\frac{9}{2}\right)}}$.

1.4 **Begründung der Anzahl und Koordinaten der Wendepunkte**

Die Koordinaten des ersten Wendepunktes $\underline{\underline{WEP_1\,(1\,|\,2{,}5)}}$ sind laut Angabe bekannt. Aufgrund der Symmetrie existiert somit ein zweiter Wendepunkt mit $\underline{\underline{WEP_2\,(-1\,|\,2{,}5)}}$. Da die Funktion vierten Grades ist, kann sie maximal 2 Wendepunkte haben, weshalb es sich bei WEP_1 und WEP_2 um die einzigen zwei Wendepunkte handelt.

Es sollen weiterhin alle Punkte bestimmt werden, für die $f(x) = 2{,}5$ ist.

$$\begin{aligned}
& & f(x) &= 2{,}5 & & \\
&\Longleftrightarrow & -\frac{1}{2}(x^4 - 6x^2) &= 2{,}5 & & |\cdot(-2) \\
&\Longleftrightarrow & x^4 - 6x^2 &= -5 & & |+5 \\
&\Longleftrightarrow & x^4 - 6x^2 + 5 &= 0 & & (\text{Substitution } x^2 = z) \\
&\Longleftrightarrow & z^2 - 6z + 5 &= 0 & &
\end{aligned}$$

Für die Gleichung in der letzten Zeile kann nun die Lösungsformel benutzt werden:

$$z_{1;2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

Für die beiden Lösungen kann nun jeweils rücksubstituiert ($z = x^2$) werden:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{6+4}{2} = 5 & &\Longleftrightarrow & x^2 &= 5 & &\Longleftrightarrow & x_{1;2} &= \pm\sqrt{5} \\
z_2 &= \frac{6-4}{2} = 1 & &\Longleftrightarrow & x^2 &= 1 & &\Longleftrightarrow & x_{3;4} &= \pm\sqrt{1} = \pm 1
\end{aligned}$$

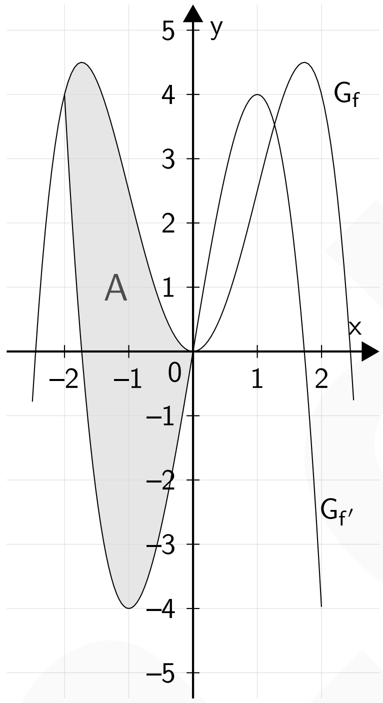
Neben den bereits bekannten Wendepunkten bei $x = \pm 1$ hat die Funktion also bei $x = \pm\sqrt{5}$ den y-Wert 2,5.

1.5 **Graphische Darstellung**

Aus den bereits bekannten Punkten wird zunächst unter Beachtung der Symmetrie eine Wertetabelle erstellt:

x	0	± 1	$\pm\sqrt{3} \approx \pm 1{,}73$	$\pm\sqrt{5} \approx \pm 2{,}24$	$\pm\sqrt{6} \approx \pm 2{,}45$
$f(x)$	0	$2{,}5$	$\frac{9}{2} = 4{,}5$	$2{,}5$	0

Damit kann die graphische Darstellung erfolgen:



1.6 **Nachweis der gegebenen Gleichung**

Die gegebene Bedingung kann durch Einsetzen überprüft werden:

$$\begin{aligned} f(-2) - f'(-2) &= -\frac{1}{2}((-2)^4 - 6 \cdot (-2)^2) + \frac{1}{2}(4 \cdot (-2)^3 - 12 \cdot (-2)) \\ &= -\frac{1}{2}(16 - 24) + \frac{1}{2}(-32 + 24) = -\frac{1}{2} \cdot (-8) + \frac{1}{2} \cdot (-8) = 0 \end{aligned}$$

Weitere Stellen die die Gleichung erfüllen

Um weitere Stellen zu finden, für die diese Bedingungen erfüllt sind, wird zunächst der Term umgeformt:

$$\begin{aligned} & f(x) - f'(x) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & -\frac{1}{2}(x^4 - 6x^2) + \frac{1}{2}(4x^3 - 12x) = 0 \qquad | \cdot 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & -x^4 + 6x^2 + 4x^3 - 12x = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & x(-x^3 + 4x^2 + 6x - 12) = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & -x^3 + 4x^2 + 6x - 12 = 0 \quad \text{oder} \quad x = 0 \end{aligned}$$

Aus dem zweiten Fall folgt direkt die erste Lösung $\underline{\underline{x_1 = 0}}$. Eine zweite Lösung ist bereits bekannt und liegt bei $\underline{\underline{x_2 = -2}}$. Es kann nun eine Polynomdivision durchgeführt werden:

$$
\begin{array}{rrrrrl}
 & (-x^3 & +4x^2 & +6x & -12) & : (x+2) = -x^2+6x-6 \\
- & (-x^3 & -2x^2 & &) & \\
\hline
 & & 6x^2 & +6x & & \\
 & - & (6x^2 & +12x &) & \\
\hline
 & & & -6x & -12 & \\
 & & - & (-6x & -12) & \\
\hline
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Mit der Lösungsformel können dafür nun zwei weitere Lösungen gefunden werden:

$$
\begin{aligned}
&-x^2+6x-6=0 \\
\Rightarrow \quad & x_{3;4} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2-4\cdot(-1)\cdot(-6)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-6\pm\sqrt{36-24}}{-2} \\
&= \frac{6\pm\sqrt{12}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{4\cdot 3}}{2} = 3\pm\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Zwei weitere Lösungen sind also $\underline{\underline{x_3 = 3+\sqrt{3}}}$ und $\underline{\underline{x_4 = 3-\sqrt{3}}}$.

Erklärung des Ergebnis
Die Bedingung $f(x)-f'(x) = 0$ bedeutet, dass die y-Koordinate an diesen Punkten der Steigung an dieser Stelle entspricht.

1.7 **Nullstellen**
Die Nullstellen der ersten Ableitung sind bereits aus Teilaufgabe 1.3 bekannt und liegen bei $\underline{\underline{x_1 = 0}}$ und $\underline{\underline{x_{2;3} = \pm\sqrt{3}}}$.

Extremstellen
Die Extremstellen der ersten Ableitung $f'(x)$ entsprechen den Wendestellen der Funktion $f(x)$ und sind nach Teilaufgabe 1.4 bereits bekannt. Sie liegen bei $\underline{\underline{x = \pm 1}}$.

Für die graphische Darstellung siehe Teilaufgabe 1.5.

1.8 Für die graphische Darstellung siehe Teilaufgabe 1.5.

Maßzahl des markierten Flächenstücks
Die Integrationsgrenzen sind aus der Lösung der Teilaufgabe 1.6 bekannt und liegen bei $x = -2$ und $x = 0$. Um die Fläche zu berechnen, wird eine Hilfsfunktion h betrachtet und deren Stammfunktion bestimmt:

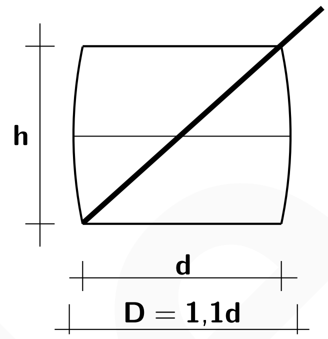
$$
\begin{aligned}
& h(x) = [\text{„oberer Graph“-„unterer Graph“}] \\
& \quad\;\; = f(x) - f'(x) = 0{,}5x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 6x \\
\Rightarrow \quad & H(x) = -0{,}1x^5 + 0{,}5x^4 + x^3 - 3x^2
\end{aligned}
$$

Dann gilt für die Flächenmaßzahl:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-2}^{0} h(x)dx = [H(x)]_{-2}^{0} \\
&= H(0) - H(-2) = -0{,}1 \cdot 0^5 + 0{,}5 \cdot 0^4 + 0^3 - 3 \cdot 0^2 - \left(-0{,}1 \cdot (-2)^5 + 0{,}5 \cdot (-2)^4 + (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2\right) \\
&= \underline{\underline{8{,}8\,[FE]}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6 - Optimierungsaufgabe: FOS12 MNT 2016, AII 3

1.0 Ein symmetrischer Trinkjoghurtbecher in der Form eines Fasses besitzt das Volumen $V = \frac{1}{12}\pi \cdot h \cdot (2D^2 + d^2)$. Hierbei ist d jeweils der Durchmesser des Deckels und des Bodens und D der maximale Durchmesser des Bechers auf halber Höhe (alle Längen in cm gemessen). Weiterhin soll D 10 % größer sein als d. Der Becher soll so konstruiert sein, dass ein 13 cm langer Strohhalm genau um 3 cm aus dem Becher herausragt, wenn er diagonal im Becher liegt (siehe Abbildung).



1.1 Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, die die Maßzahl des Bechervolumens in Abhängigkeit von der Höhe h beschreibt.

[Mögliches Ergebnis: $V(h) = \frac{57}{200}\pi \cdot (-h^3 + 100h)$] **4 BE**

1.2 Mit der Vorgabe $5 \leq h \leq 9$ soll der Becher für eine kostenlose Probe das geringste Volumen aufweisen. Berechnen Sie für diesen Fall die Höhe h in cm und das zugehörige Volumen in cm^3 auf eine Nachkommastelle gerundet. **7 BE**

Lösungsvorschlag A6 Optimierungsaufgabe: FOS12 MNT 2016, AII 3

1.0 Betrachtet wird ein symmetrische Trinkjoghurtbecher, dessen Volumen durch $V = \frac{1}{12}\pi \cdot h \cdot (2D^2 + d^2)$ beschrieben wird.

1.1 **Funktionsgleichung der Volumenmaßzahl**
Der Strohhalm hat eine Länge von 13 cm und ragt 3 cm aus dem Becher raus. Demnach hat die Diagonale des Bechers eine Länge von 10 cm. Gemäß dem Satz des Pythagoras gilt dann:

$$d^2 + h^2 = 10^2 \quad \Longleftrightarrow \quad d^2 = 10^2 - h^2$$

Aus der Zeichnung geht außerdem hervor, dass $D = 1{,}1d$ gilt. Damit folgt:

$$D = \frac{11}{10}d \quad \Longleftrightarrow \quad D^2 = \left(\frac{11}{10} \cdot \frac{11}{10}\right) d^2 = \frac{121}{100}d^2$$

Diese ermittelten Werte für D^2 und d^2 können nun in die Gleichung des Volumens eingesetzt werden um die Gleichung der Funktion V in Abhängigkeit der Höhe h zu gewinnen:

$$\begin{aligned}
V(D,d,h) &= \frac{1}{12}\pi \cdot h \cdot (2D^2 + d^2) && \text{(Einsetzen von } D^2\text{)} \\
\Rightarrow \quad V(d,h) &= \frac{1}{12}\pi \cdot h \cdot \left(2 \cdot \frac{121}{100}d^2 + d^2\right) \\
&= \frac{1}{12}\pi \cdot h \cdot \left(\frac{342}{100}d^2\right) = \frac{342}{1200}\pi \cdot h \cdot d^2 && \text{(Einsetzen von } d^2\text{)} \\
\Rightarrow \quad V(h) &= \frac{57}{200}\pi \cdot h \cdot (100 - h^2) \\
&= \underline{\underline{\frac{57}{200}\pi \cdot (-h^3 + 100h)}}
\end{aligned}$$

1.2 **Minimales Volumen**
Zunächst wird die erste und die zweite Ableitung der Funktion V(h) gebildet:

$$\begin{aligned}
V(h) &= \frac{57}{200}\pi(-h^3 + 100h) \\
V'(h) &= \frac{57}{200}\pi(-3h^2 + 100) \\
V''(h) &= \frac{57}{200}\pi(-3 \cdot 2h) = -\frac{171}{100}\pi \cdot h
\end{aligned}$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung entsprechen den möglichen Extremstellen der Funktion:

$$\begin{aligned}
V'(h) &= 0 \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{57}{200}\pi(-3h^2 + 100) &= 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \qquad && -3h^2+100 &= 0 && \mid +3h^2 \\
\Longleftrightarrow \qquad && 100 &= 3h^2 && \mid :3 \\
\Longleftrightarrow \qquad && h^2 &= \frac{100}{3} && \mid \sqrt{} \\
\Longleftrightarrow \qquad && h &= \pm\sqrt{\frac{100}{3}} && \\
\Longleftrightarrow \qquad && h_1 = -\sqrt{\frac{100}{3}} \quad &\text{oder} \quad h_2 = \sqrt{\frac{100}{3}} &&
\end{aligned}
$$

Aufgrund der Vorgabe $5 \leq h \leq 9$ ist jedoch nur die positive Lösung $h = \sqrt{\frac{100}{3}}$ von Interesse. Dieser Wert wird nun in die zweite Ableitung eingesetzt:

$$
V''\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) = -\frac{171}{100}\pi \cdot \sqrt{\frac{100}{3}} \approx -31{,}02 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HOP}
$$

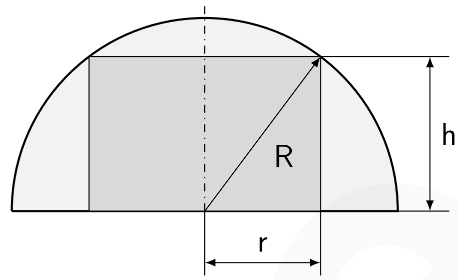
Es handelt sich also um ein relatives Maximum. Da aber das Minimum im Bereich $5 \leq h \leq 9$ gesucht ist, muss dieses am Rand, also bei $h = 5$ oder $h = 9$ liegen. Es werden die jeweiligen Volumina an diesen beiden Stelle bestimmt:

$$
\begin{aligned}
V(5) &= \frac{57}{200}\pi \cdot (-5^3 + 100 \cdot 5) = \frac{57}{200}\pi \cdot (-125 + 500) \approx 335{,}8 \\
V(9) &= \frac{57}{200}\pi \cdot (-9^3 + 100 \cdot 9) = \frac{57}{200}\pi \cdot (-729 + 900) \approx 153{,}1
\end{aligned}
$$

Das absolute Minimum im Bereich $5 \leq h \leq 9$ liegt also bei $\underline{h = 9\,\text{cm}}$ mit einem Volumen von $\underline{\underline{V \approx 153{,}1\,\text{cm}^3}}$ vor.

Aufgabe 7 - Optimierungsaufgabe: FOS12 MNT 2017, AI 3

1.0 Einer Halbkugel mit Radius R=10 cm soll ein Zylinder mit Radius r und Höhe h einbeschrieben werden (siehe Skizze). Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.



1.1 Ermitteln Sie die Maßzahl V(h) des Volumens des Zylinders in Abhängigkeit von der Höhe h und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion $V: h \longmapsto V(h)$ an, wenn die Höhe h mindestens 6 cm betragen soll.

[Mögliches Teilergebnis: $V(h) = h\pi(100 - h^2)$] **4 BE**

1.2 Berechnen Sie h so, dass V(h) den absolut größten Wert annimmt, und untersuchen Sie, ob das maximale Volumen V_{max} des Zylinders mehr als die Hälfte des Halbkugelvolumens beträgt. **9 BE**

Lösungsvorschlag A7 Optimierungsaufgabe: FOS12 MNT 2017, AI 3

1.0 Betrachtet wird nun eine Halbkugel mit Radius $R = 10\,\text{cm}$, die einem Zylinder mit Radius r und Höhe h einbeschrieben werden soll.

1.1 **Ermitteln der Maßzahl V(h)**

Im Folgenden wird auf das Mitführen von Einheiten verzichtet.

Es wird das Dreieck aus den Seiten R, r und h betrachtet. Dieses Dreieck ist rechtwinklig, sodass der Satz des Pythagoras verwendet werden kann:

$$\begin{aligned} & r^2 + h^2 = R^2 && \mid -h^2 \\ \iff\quad & r^2 = R^2 - h^2 \end{aligned}$$

Mit $R = 10$ ist also $r^2 = 100 - h^2$. Das Volumen des Zylinders ergibt sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned} & V(r,h) = A_G \cdot h = \pi r^2 \cdot h && \text{(Einsetzen von } r^2\text{)} \\ \Rightarrow\quad & V(h) = \pi(100 - h^2) \cdot h = \underline{\underline{\pi(100h - h^3)}} \end{aligned}$$

Definitionsbereich

Die untere Grenze des Definitionsbereichs von V(h) ist laut Angabe vorgegeben, da die Höhe mindestens 6 cm betragen soll. Die obere Grenze ergibt sich, da die Höhe weder größer als R, noch gleich R sein darf, da sonst jeweils kein Zylinder entsprechend der Aufgabe entstehen würde. Demnach ergibt sich der Definitionsbereich zu $\underline{\underline{D_V = [6;\, 10[}}$.

1.2 **Berechnen von h für maximales Volumen**

Zunächst wird die Ableitung der Funktion bestimmt:

$$V(h) = \pi(100h - h^3) \quad \Rightarrow \quad V'(h) = \pi(100 - 3h^2)$$

Es werden die Nullstellen der ersten Ableitung berechnet:

$$\begin{aligned} & V'(h) = 0 \\ \iff\quad & \pi(100 - 3h^2) = 0 && \mid :\pi \\ \iff\quad & 100 - 3h^2 = 0 && \mid +3h^2 \\ \iff\quad & 100 = 3h^2 && \mid :3 \\ \iff\quad & \frac{100}{3} = h^2 && \mid\sqrt{\ } \\ \iff\quad & h_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{100}{3}} \end{aligned}$$

Für die beiden Lösungen gilt jedoch $h_1 = \sqrt{\frac{100}{3}} \notin D_V$ und $h_2 = -\sqrt{\frac{100}{3}} \notin D_V$. Demnach muss das Maximum auf dem Rand liegen. Für $h = 6$ kann das Volumen durch Einsetzen berechnet werden, während man für $h \to 10$ eine Grenzwertbetrachtung durchführen muss, da $10 \notin D_V$:

$$V(6) = \pi \cdot 6(100 - 6^2)\pi \cdot 6 \cdot 64 = 384\pi$$

$$h \to 10^-: \; V(h) = \pi \cdot (\underbrace{100h}_{\to 1000} - \underbrace{h^3}_{\to 1000}) \to 0$$

Demnach ist $h_{max} = 6\,\text{cm}$ mit $V_{max} = 384\pi\,\text{cm}^3$.

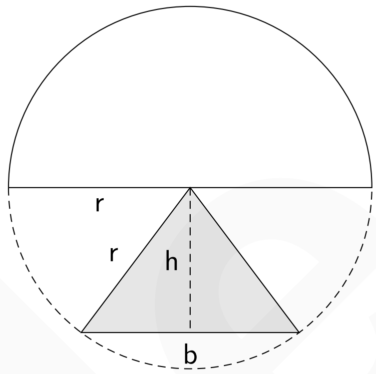
Verhältnis der Volumina
Weiterhin wird das Verhältnis von V_{max} zum Halbkugelvolumen betrachtet:

$$\frac{V_{max}}{V_{HK}} = \frac{384\pi}{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi 10^3} = \frac{384\pi}{\frac{2000}{3}\pi} = \frac{1152}{2000} \approx 0{,}576 > 0{,}5$$

Das maximale Volumen V_{max} beträgt mehr als die Hälfte des Volumens der Halbkugel.

Aufgabe 8 - Optimierungsaufgabe: FOS12 MNT 2017, AII 3

1.0 Ein Designstudio hat eine Nachttischleuchte entworfen. Diese besteht aus einem halbkugelförmigen Schirm mit Radius r= 12 cm und einem Leuchtenfuß in der Form eines geraden Kreiskegels mit der Höhe h und dem Durchmesser b in der Grundfläche (siehe nebenstehende Skizze). Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.



1.1 Bestimmen Sie die Maßzahl V(h) des Volumens des Fußes der Leuchte in Abhängigkeit von h.
[Mögliches Ergebnis: $V(h) = \frac{\pi}{3}(-h^3 + 144h)$] **3 BE**

1.2 Aus technischen Gründen wird für die Funktion $V\colon h \longmapsto V(h)$ als Defintionsbereich $D_V = [2; 8]$ gewählt.
Bestimmen Sie die Höhe h des Leuchtenfußes so, dass die Maßzahl seines Volumens den absolut größten Wert annimmt. Nach Auffassung der Designer würde dann die Leuchte die ansprechendsten Proportionen besitzen. **6 BE**

Lösungsvorschlag A8 Optimierungsaufgabe: FOS12 MNT 2017, AII 3

1.0 Untersucht wird ein Leuchtenfuß in Form eines geraden Kreiskegels mit der Höhe h und dem Durchmesser b.

1.1 Im Folgenden wird auf das Mitführen von Einheiten verzichtet.

Maßzahl des Volumens des Fußes

Das Dreieck, was den Fuß im Querschnitt repräsentiert, wird durch die eingezeichnete Höhe h in zwei identische rechtwinklige Dreiecke geteilt. Jedes der beiden Dreiecke hat die Seitenlängen r, h und $\frac{b}{2}$. Mit dem Satz des Pythagoras gilt in diesem Dreieck:

$$r^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{b}{2}\right)^2 = r^2 - h^2 = 144 - h^2$$

Der Fuß entspricht einem geraden Kreiskegel, sodass für das Volumen gilt:

$$V(b,h) = \frac{1}{3}A_G \cdot h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot h \qquad \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 \text{ Einsetzen}\right)$$

$$\Rightarrow \quad V(h) = \frac{1}{3}\pi(144 - h^2) \cdot h = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}(-h^3 + 144h)}}$$

1.2 **Maximales Volumen**

Um das maximale Volumen zu ermitteln, wird die erste Ableitung bestimmt:

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(-3h^2 + 144)$$

Die Extremstellen der Funktion entsprechen nun den Nullstellen der ersten Ableitung:

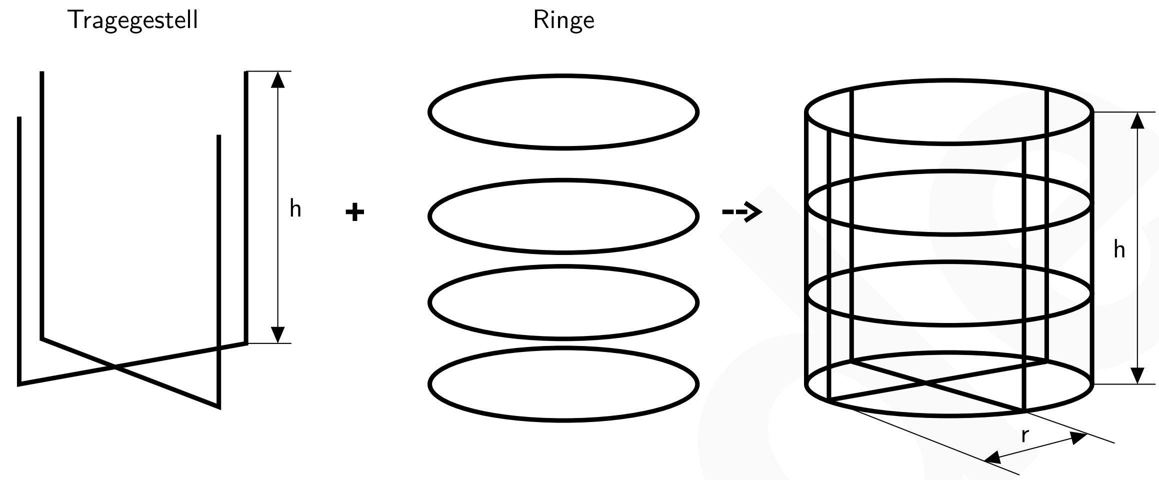
$$\begin{aligned} & V'(h) = 0 & \\ \Longleftrightarrow\quad & -3h^2 + 144 = 0 & \mid +3h^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & 144 = 3h^2 & \mid :3 \\ \Longleftrightarrow\quad & \frac{144}{3} = h^2 & \mid\sqrt{\ } \\ \Longleftrightarrow\quad & h_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{144}{3}} & \\ \Longleftrightarrow\quad & h_{1;2} = \pm\frac{12}{\sqrt{3}} & \\ \Longleftrightarrow\quad & h_{1;2} = \pm\frac{4\cdot 3}{\sqrt{3}} & \\ \Longleftrightarrow\quad & h_{1;2} = \pm 4\sqrt{3} & \end{aligned}$$

Die Lösung $h_1 = -4\sqrt{3} \notin D_V$ liegt dabei nicht im Definitionsbereich und muss nicht weiter betrachtet werden. Da es sich bei $V'(h)$ um eine nach unten geöffnete Parabel handelt und

$4\sqrt{3} > -4\sqrt{3}$ ist, liegt bei $h = 4\sqrt{3}$ ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von „+“ nach „-“ vor. Demnach handelt es sich also um ein Maximum des Volumens bei der Höhe $h_{max} = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Aufgabe 9 - Optimierungsaufgabe: FOS12 MNT 2018, AI 3

1.0 Ein Bastler möchte sich mithilfe folgender Bauanleitung das Grundgerüst für einen zylinderförmigen Abfallkorb mit Höhe h und Radius r (alle Längen in Meter gemessen) aus Draht bauen (siehe Skizze).



Für das Vorhaben kauft er sich Draht mit der Länge 6 m. Die Einzelteile werden selbst hergestellt und zusammengelötet. Die Dicke des Drahts ist zu vernachlässigen. Bei Berechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

1.1 Bestimmen Sie die Maßzahl V(r) des Volumens des Abfallkorbs in Abhängigkeit von r.

[Mögliches Ergebnis: $V(r) = \pi(\frac{3}{2}r^2 - r^3 - 2\pi r^3)$] **5 BE**

1.2 Aus praktischen Gründen wird für die Funktion
$V: r \longmapsto V(r)$ als Definitionsmenge $D_v = [0{,}1;\ 0{,}2]$ gewählt.
Berechnen Sie den Radius r des Abfallkorbs für den Fall, dass die Maßzahl des Volumens ihren absolut größten Wert annimmt.
Runden Sie Ihr Ergebnis auf drei Nachkommastellen. **7 BE**

Lösungsvorschlag A9 Optimierungsaufgabe: FOS12 MNT 2018, AI 3

1.1 **Funktionsgleichung der Maßzahl des Volumens**

Die Gesamtlänge des Drahtes beträgt 6 m. Wie der Graphik zu entnehmen ist, besteht das Tragegestell aus 4 Drahtstücken der Länge h, und aus 4 Drahtstücken der Länge r. Die 4 Ringe haben jeweils eine Länge von $2\pi \cdot r$. Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
& & 6 &= 4h + 4r + 4 \cdot 2\pi r & &|-(4r+8\pi r)\\
&\Longleftrightarrow & 4h &= 6 - 4r - 8\pi r & &|:4\\
&\Longleftrightarrow & h &= \frac{3}{2} - (2\pi + 1)r & &
\end{aligned}
$$

Dies kann nun benutzt werden um eine Funktionsgleichung der Maßzahl des Volumens zu finden:

$$
\begin{aligned}
& & V(r,h) &= \pi \cdot r^2 \cdot h & &\text{(Einsetzen von h)}\\
&\Longleftrightarrow & V(r) &= \pi \cdot r^2 \cdot \left(\frac{3}{2} - (2\pi + 1)r\right) & &\\
&\Longleftrightarrow & V(r) &= \pi \cdot \left(\frac{3}{2}r^2 - r^3 - 2\pi r^3\right) & &
\end{aligned}
$$

1.2 **Maximales Volumen**

Zunächst wird die erste Ableitung der Funktion bestimmt:

$$V(r) = \pi \cdot \left(\frac{3}{2}r^2 - r^3 - 2\pi r^3\right) \qquad V'(r) = \pi \cdot (3r - 6\pi r^2 - 3r^2)$$

Es werden nun die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt:

$$
\begin{aligned}
& & V'(r) &= 0\\
&\Longleftrightarrow & \pi \cdot (3r - 6\pi r^2 - 3r^2) &= 0\\
&\Longleftrightarrow & r(3 - 6\pi r - 3r) &= 0\\
&\Longleftrightarrow & r_1 &= 0 \quad \text{oder} \quad 3 - 6\pi r_2 - 3r_2 = 0
\end{aligned}
$$

Es ist $r_1 = 0 \notin D_V$, weshalb als Lösung zunächst nur r_2 in Frage kommt:

$$
\begin{aligned}
& & 3 - 6\pi r_2 - 3r_2 &= 0 & &|-3\\
&\Longleftrightarrow & -(6\pi + 3)r_2 &= -3 & &|:(-(6\pi+3))\\
&\Longleftrightarrow & r_2 &= \frac{3}{6\pi + 3} & &\\
&\Longleftrightarrow & r_2 &= \frac{1}{2\pi + 1} & &\\
&\Longleftrightarrow & r_2 &\approx 0{,}137 & &
\end{aligned}
$$

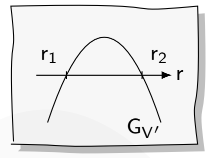
Für die weitere Betrachtung gibt es nun zwei Varianten:

1. Variante: Mithilfe einer Skizze

Es wird eine Skizze der ersten Ableitung und eine Vorzeichentabelle unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs erstellt:

r	$r < r_1$	$r = r_1$	$r_1 < r < 0{,}1$	$0{,}1 \leq r < r_2$	$r = r_2$	$r_2 < r \leq 0{,}2$	$0{,}2 < r$
$G_{V'}$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$
G_V	n.def.	n.def.	n.def.	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	n.def.

Skizze



Die Funktion ist stetig und es liegt keine weitere Nullstelle der ersten Ableitung in D_V vor. Somit handelt es sich bei $\underline{\underline{r_2 \approx 0{,}137}}$ [m] um ein absolutes Maximum.

2. Variante: Begründung

Es ist $r_1 \notin D_V$. Die Ableitungsfunktion V' ist eine Parabel und besitzt nur zwei Nullstellen r_1 und r_2. Da bei $r_2 \in D_V$ ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von „+“ nach „-“ vorliegt, handelt es sich um eine Maximum. Da außerdem keine weitere Nullstelle der ersten Ableitung in D_V vorliegt und die Funktion stetig ist, handelt es sich um ein absolutes Maximum.

Aufgabe 10 - Medikamentensynthese (Anwendungsaufgabe): FOS12 MT 2015, AI 3

Themen: Parameter bestimmen, Extremwert

1.0 Bei der Synthese eines Medikaments wird die Temperatur T(t) (in °C) während der Reaktionsdauer t (in Minuten) mit $t \geq 0$ kontinuierlich gemessen.
Dabei gilt: $T(t) = 10 \cdot \left(t \cdot e^{1-k \cdot t} + c\right)$ mit $k, c \in \mathbb{R}$ und $k \neq 0$.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird eine Temperatur von 18 °C gemessen. Nach einer Reaktionsdauer von 8 Minuten beträgt die Temperatur 47,43 °C. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen zu runden.

1.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter c und k.

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $c = 1{,}8$ und $k = 0{,}25$. **5 BE**

1.2 Berechnen Sie das Temperaturmaximum während der Reaktion.
[Mögliches Teilergebnis: $\frac{d}{dt}T(t) = 10 \cdot e^{1-0{,}25 \cdot t} - 2{,}5 \cdot t \cdot e^{1-0{,}25 \cdot t}$] **7 BE**

1.3 Um die Qualität des Endprodukts nicht zu gefährden, darf in der Abkühlphase die Temperaturabnahme in jeder Minute höchstens 4 °C betragen. Zeigen Sie, dass dies selbst im Augenblick der stärksten Abkühlung eingehalten wird. **7 BE**

Lösungsvorschlag A10 Medikamentensynthese: FOS12 MT 2015, AI 3

1.0 Gegeben ist die Funktion $T(t) = 10 \cdot (t \cdot e^{1-k\cdot t} + c)$ mit $k,c \in \mathbb{R}$ und $k \neq 0$, die die Temperatur bei der Synthese eines Medikamentes beschreibt.

1.1 **Ermitteln der Parameter**
Die unbekannten Parameter können durch Einsetzen der gegebenen Wertepaare ermittelt werden. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist $T = 18$, es gilt also $T(0) = 18$:

$$\begin{aligned} && T(0) &= 18 & \\ \Longleftrightarrow && 10 \cdot (0 \cdot e^{1-k\cdot 0} + c) &= 18 & \\ \Longleftrightarrow && 10c &= 18 & \mid :10 \\ \Longleftrightarrow && c &= \underline{1{,}8} & \end{aligned}$$

Nach 8 Minuten ist die Temperatur auf 47,43°C gestiegen. Es gilt also $T(8) = 47{,}43$. Setzt man dies und den ermittelten Wert für c ein, kann k bestimmt werden:

$$\begin{aligned} && T(8) &= 47{,}43 & (t = 8 \text{ und } c = 1{,}8 \text{ einsetzen}) \\ \Longleftrightarrow && 10 \cdot (8 \cdot e^{1-8k} + 1{,}8) &= 47{,}43 & \mid :10 \\ \Longleftrightarrow && 8 \cdot e^{1-8k} + 1{,}8 &= 4{,}743 & \mid -1{,}8 \\ \Longleftrightarrow && 8 \cdot e^{1-8k} &= 2{,}943 & \mid :8 \\ \Longleftrightarrow && e^{1-8k} &= \frac{2{,}943}{8} & \mid \ln(\;) \\ \Longleftrightarrow && 1 - 8k &= \ln\left(\frac{2{,}943}{8}\right) & \mid -1 \\ \Longleftrightarrow && -8k &= \ln\left(\frac{2{,}943}{8}\right) - 1 & :(-8) \\ \Longleftrightarrow && k &= \left(\ln\left(\frac{2{,}943}{8}\right) - 1\right) : (-8) & \\ \Longleftrightarrow && k &\approx \underline{0{,}25} & \end{aligned}$$

Die Funktionsgleichung lautet also $T(t) = 10 \cdot (t \cdot e^{1-0{,}25t} + 1{,}8)$.

1.2 **Maximale Temperatur**
Um das Maximum der Temperatur zu bestimmen, wird zunächst mithilfe der Ketten- und Produktregel deren zeitliche Ableitung $\dot{T}(t)$ berechnet:

$$\begin{aligned} T(t) &= 10 \cdot (t \cdot e^{1-0{,}25t} + 1{,}8) & \\ \dot{T}(t) &= 10 \cdot \left[(t)' \cdot e^{1-0{,}25t} + t \cdot \left(e^{1-0{,}25t}\right)'\right] & \text{(Ansatz Produktregel)} \\ &= 10 \cdot (1 \cdot e^{1-0{,}25t} + t \cdot (e^{1-0{,}25t}) \cdot (-0{,}25)) & \text{(Anwendung und } (e^{1-0{,}25t}) \text{ Ausklammern)} \\ &= 10e^{1-0{,}25t}(1 - 0{,}25t) & \text{(Zur Kontrolle angegeben)} \end{aligned}$$

Die Funktion besitzt ein mögliches Extremum dort, wo $\dot{T}(t) = 0$ ist. Da aber der Faktor mit der Exponentialfunktion nie den Wert null annehmen kann, gilt:

$$\dot{T}(t) = 10 \cdot e^{1-0,25 \cdot t} \cdot (1 - 0,25 \cdot t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (1 - 0,25 \cdot t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 4$$

Die Funktion besitzt bei $t = 4$ eine Extremstelle. Da die Ableitung für $t < 4$ ein positives Vorzeichen und für $t > 4$ ein negatives Vorzeichen hat, handelt sich bei $t = 4$ also um ein Maximum. Weiterhin muss der Temperaturwert an dieser Stelle bestimmt werden:

$$T(4) = 10 \cdot \left(4 \cdot e^{1-4 \cdot 0,25} + 1,8\right) = 10 \cdot (4 \cdot 1 + 1,8) = 10 \cdot 5,8 = 58$$

Die Temperatur erreicht nach vier Minuten ein Maximum von $\underline{\underline{58°C}}$.

1.3 **Wert der Temperaturabnahme**

Kühlt das Endprodukt ab, so fällt die Temperaturkurve. Um die Stelle zu finden, an der die Abkühlung am stärksten ist, wird zunächst mithilfe von Ketten- und Produktregel die zweite Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned}
\dot{T}(t) &= 10e^{1-0,25t}(1-0,25t) \\
\ddot{T}(t) &= 10 \cdot \left[(e^{1-0,25t})' \cdot (1-0,25t) + e^{1-0,25t} \cdot (1-0,25t)'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\
&= 10 \cdot (e^{1-0,25t} \cdot (-0,25) \cdot (1-0,25t) + e^{1-0,25t} \cdot (-0,25)) && \text{(Anwendung)} \\
&= 10 \cdot (-0,25e^{1-0,25t} \cdot (1-0,25t) - 0,25e^{1-0,25t}) && \text{((}-0,25e^{1-0,25t}\text{) Ausklammern)} \\
&= -2,5e^{1-0,25t} \cdot (1-0,25t+1) && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= -2,5e^{1-0,25t} \cdot (2-0,25t)
\end{aligned}$$

Die Nullstelle der zweiten Ableitung entspricht einem Extremum der Steigung, also entweder stärkster Erwärmung oder stärkster Abkühlung. Auch hier kann der Faktor mit der Exponentialfunktion nicht null werden, weshalb gilt:

$$\ddot{T}(t) = -2,5 \cdot e^{1-0,25 \cdot t} \cdot (2 - 0,25 \cdot t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (2 - 0,25t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 8$$

Das Vorzeichen der zweiten Ableitung wechselt bei $t = 8$ von „-“ zu „+“. Damit liegt hier ein Minimum von $\dot{T}$ vor, also der Moment der stärksten Abkühlung. Es wird der Wert zum Zeitpunkt $t = 8$ bestimmt:

$$\dot{T}(8) = 10 \cdot e^{1-2} \cdot (1-2) = -\frac{10}{e} \approx -3,68$$

Für $t = 8$ liegt mit 3,68°C/min die stärkste Abkühlung vor. Die Forderung nach höchstens 4°C wird also auch im Moment der stärksten Abkühlung eingehalten.

Aufgabe 11 - Borkenkäfer (Anwendungsaufgabe): FOS12 MT 2015, AII 3
Themen: Parameter bestimmen, Extrempunkte, Wendepunkt

1.0 Um die Ausbreitung von Borkenkäfern in bayerischen Wäldern zu erforschen, wird der Befall eines ausgewählten Baumes über den Zeitraum von 12 Monaten untersucht. Die Anzahl der in diesem Baum befindlichen Borkenkäfer kann näherungsweise durch den Term $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot (t^2 - 12t)}$ mit $t, \lambda \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0, \lambda < 0$ beschrieben werden, wobei N_0 die Anzahl der Borkenkäfer zu Beginn des Beobachtungszeitraums und t die Zeit in Monaten ab Beobachtungsbeginn ist.

Es ist bekannt, dass sich die Anzahl der Borkenkäfer nach dem ersten Monat verdreifacht hat und nach einem weiteren Monat 133 Borkenkäfer gezählt wurden.

Alle Ergebnisse sind auf zwei Nachkommastellen zu runden, sofern nicht anders gefordert. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

1.1 Bestimmen Sie λ und N_0. Runden Sie dabei N_0 auf eine ganze Zahl.

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $\lambda = -0{,}10$ und $N_0 = 18$. **5 BE**

1.2 Ab einem Befall von 540 Borkenkäfern gilt der Baum als dauerhaft geschädigt. Berechnen Sie den Zeitpunkt t_0, zu dem diese Anzahl erstmalig erreicht ist. **5 BE**

1.3 Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_{max}, zu dem der Befall des Baumes am größten ist. [Mögliches Teilergebnis: $\dot{N}(t) = -3{,}6 \cdot e^{-0{,}10 \cdot (t^2 - 12t)} \cdot (t - 6)$] **4 BE**

1.4 $\ddot{N}$ besitzt nur die beiden einfachen Nullstellen $t_{1,2} = 6 \pm \sqrt{5}$ (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_v, zu dem sich die Borkenkäfer am stärksten vermehren. **5 BE**

Lösungsvorschlag A11 Borkenkäfer: FOS12 MT 2015, AII 3

1.0 Gegeben ist die Funktion $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda(t^2-12t)}$ mit $t, \lambda \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0, \lambda < 0$, die die Anzahl der Borkenkäfer in einem Baum beschreibt.

1.1 **Bestimmen der Parameter**

Zunächst ist bekannt, dass sich die Anzahl der Borkenkäfer nach einem Monat verdreifacht hat. Es gilt also $N(1) = 3 \cdot N_0$. Setzt man dies in den Funktionsterm $N(t)$ ein, kann λ bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
& & 3N_0 &= N(1) & & \\
&\Longleftrightarrow & 3N_0 &= N_0 \cdot e^{\lambda\cdot(1^2-12)} & &|: N_0 \\
&\Longleftrightarrow & 3 &= e^{-11\lambda} & &|\ln(\ ) \\
&\Longleftrightarrow & \ln(3) &= -11\lambda & &|:(-11) \\
&\Longleftrightarrow & \lambda &= -\frac{\ln(3)}{11} & & \\
&\Longleftrightarrow & \lambda &\approx \underline{-0{,}10} & &
\end{aligned}
$$

Nach einem weiteren Monat werden 133 Borkenkäfer gezählt, das heißt $N(2) = 133$. Setzt man dies und den ermittelten Wert für λ ein, kann N_0 bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
& & 133 &= N(2) & & \\
&\Longleftrightarrow & 133 &= N_0 \cdot e^{-0{,}1\cdot(2^2-12\cdot 2)} & & \\
&\Longleftrightarrow & 133 &= N_0 \cdot e^2 & &|: e^2 \\
&\Longleftrightarrow & N_0 &= \frac{133}{e^2} & & \\
&\Longleftrightarrow & N_0 &\approx \underline{18} & &
\end{aligned}
$$

1.2 **Zeitpunkt zu dem erstmals eine schädliche Anzahl erreicht wird**

Im Zeitpunkt, zu dem diese Anzahl erstmalig eintritt, gilt $N(t_0) = 540$:

$$
\begin{aligned}
& & N(t) &= 540 & & \\
&\Longleftrightarrow & 18 \cdot e^{-0{,}1\cdot(t^2-12t)} &= 540 & &|: 18 \\
&\Longleftrightarrow & e^{-0{,}1\cdot(t^2-12t)} &= 30 & &|\ln(\ ) \\
&\Longleftrightarrow & -0{,}1 \cdot (t^2-12t) &= \ln(30) & &|-\ln(30) \\
&\Longleftrightarrow & -0{,}1t^2 + 1{,}2t - \ln(30) &= 0 & & \\
&\Longleftrightarrow & t_{1,2} &= \frac{-1{,}2 \pm \sqrt{(-1{,}2)^2 - 4\cdot(-0{,}1)\cdot(-\ln(30)}}{2\cdot(-0{,}1)} & & \\
&\Longleftrightarrow & t_{1,2} &= \frac{-1{,}2 \pm \sqrt{1{,}44 - 0{,}4\ln(30)}}{-0{,}2} & &
\end{aligned}
$$

$$\iff \quad t_{1,2} = \frac{-1{,}2 \pm \sqrt{0{,}04 \cdot (36 - 10\ln(30))}}{-0{,}2}$$

$$\iff \quad t_{1,2} = \frac{-1{,}2 \pm 0{,}2\sqrt{36 - 10\ln(30)}}{-0{,}2}$$

$$\iff \quad t_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 10\ln(30)}$$

$$\iff \quad t_1 \approx 4{,}59 \quad \text{oder} \quad t_2 \approx 7{,}41$$

Die Anzahl ist demnach erstmalig nach $\underline{\underline{t_0 \approx 4{,}59}}$ Monaten erreicht.

1.3 **Zeitpunkt des größten Befalls**

Der größte Befall entspricht dem Maximum der Funktion N(t). Um dieses zu finden wird zunächst die erste Ableitung $\dot{N}(t)$ mithilfe der Kettenregel gebildet:

$$
\begin{aligned}
N(t) &= 18 \cdot e^{-0{,}1(t^2-12t)} \\
\dot{N}(t) &= 18 \cdot \left[e^{-0{,}1(t^2-12t)} \cdot (-0{,}1(t^2-12t))'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= 18 \cdot e^{-0{,}1(t^2-12t)} \cdot (-0{,}1 \cdot (2t-12)) && \text{(Anwendung Kettenregel)} \\
&= -1{,}8 \cdot e^{-0{,}1(t^2-12t)} \cdot (2t-12) \\
&= -3{,}6 \cdot e^{-0{,}1(t^2-12t)} \cdot (t-6) && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}
$$

Die Nullstellen der Ableitung entsprechen den möglichen Extremstellen der Funktion. Der Faktor der Ableitungsfunktion, der die Exponentialfunktion enthält kann nicht null werden. Damit gilt:

$$\dot{N}(t) = 0 \quad \iff \quad (t-6) = 0 \quad \iff \quad t = 6$$

Bei $t = 6$ wechselt die Ableitungsfunktion von einem positiven zu einem negativen Vorzeichen, es handelt sich also um ein Maximum. Der Befall ist demnach nach 6 Monaten am größten.

1.4 **Zeitpunkt der stärksten Vermehrung**

Für die beiden gegebenen Werte gilt:

$$t_1 = 6 - \sqrt{5} \approx 3{,}76 \qquad t_2 = 6 + \sqrt{5} \approx 8{,}24$$

Dies sind die Nullstellen von $\ddot{N}(t)$. An diesen Stellen ist $\dot{N}(t)$ demnach extremal. Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem sich die Käfer am stärksten vermehren. Dies entspricht einem Maximum von $\dot{N}$. Nach Teilaufgabe 3.3 ist aber bekannt, dass $\dot{N}(t) < 0$ für $t > 6$ und $\dot{N}(t) > 0$ für $t < 6$. Für ein Maximum muss aber $\dot{N}(t) > 0$ gelten. Damit ist $t_v < 6$. Aus den gegebenen beiden Werten liegt nur einer in diesem Bereich. Zum Zeitpunkt $\underline{\underline{t_v = 6 - \sqrt{5} \approx 3{,}76}}$ vermehren sich die Käfer also am stärksten.

Aufgabe 12 - CO_2-Emissionsrate (Anwendungsaufgabe): FOS12 MT 2016, AI 2
Themen: Parameter bestimmen, Extrempunkt, Graphische Darstellung, Wendepunkt

1.0 Seit Beginn des 20. Jahrhunderts führt der vom Menschen verursachte zusätzliche Ausstoß von Kohlenstoffdioxid (CO_2) zu einer Verstärkung des Treibhauseffektes, das heißt zu einem globalen Temperaturanstieg mit weitreichenden Folgen.
Nach einem mathematischen Modell soll die Entwicklung der weltweiten CO_2-Emissionen abgeschätzt werden. Dieses Modell lässt sich näherungsweise durch die mathematische Funktion $k\colon t \longmapsto a \cdot t^2 \cdot e^{-b \cdot t} + 7$ mit $t,\ a,\ b \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$ darstellen.
Dabei entspricht $k(t)$ der CO_2-Emissionsrate in Mrd. Tonnen pro Jahr zum Zeitpunkt t, wobei t die seit Beginn des Jahres 1950 vergangene Zeit in Jahren beschreibt. Unter der CO_2-Emissionsrate wird dabei im Folgenden die ausgestoßene Masse an CO_2 pro Zeiteinheit verstanden.
Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

1.1 Nach diesem Szenario lag die CO_2-Emissionsrate zu Beginn des Jahres 2000 bei genau 30 Mrd. Tonnen pro Jahr und zu Beginn des Jahres 2200 wird sie bei genau 17,5 Mrd. Tonnen CO_2 pro Jahr liegen. Bestimmen Sie mithilfe dieser Angaben die Parameter a und b der Funktion k auf drei Nachkommastellen gerundet. **6 BE**

1.2.0 Im Folgenden gilt $a = 0{,}025$ und $b = 0{,}020$.

Alle folgenden Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.

1.2.1 Bestimmen Sie die nach diesem Modell prognostizierte CO_2-Emissionsrate zu Beginn des Jahres 2017. **2 BE**

1.2.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt t_m, zu dem die absolut maximale CO_2-Emissionsrate zu erwarten ist.
[Mögliches Teilergebnis: $\dot{k}(t) = 0{,}05 \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} \cdot (-0{,}01 \cdot t^2 + t)$] **8 BE**

1.2.3 Zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion k für $0 \leq t \leq 250$ (die Jahre 1950 bis 2200) in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: t-Achse: 50 Jahre $\widehat{=}$ 2 cm; k-Achse: 10 Mrd. Tonnen/Jahr $\widehat{=}$ 2 cm. **4 BE**

1.2.4 Ermitteln Sie rechnerisch, in welchem Jahr zwischen 1950 und heute der Zeitpunkt liegt, an dem die CO_2-Emissionsrate nach diesem Modell am meisten zugenommen hat. **7 BE**

1.2.5 Die Funktion $K\colon t \longmapsto (-1{,}25 \cdot t^2 - 125 \cdot t - 6250) \cdot e^{-0{,}02 \cdot t} + 7 \cdot t$ mit $t \geq 0$ und $t \in \mathbb{R}$ ist eine Stammfunktion von k (Nachweis nicht erforderlich).

Bestimmen Sie, wie viele Tonnen CO_2 voraussichtlich im Jahr 2016 insgesamt ausgestoßen werden, wenn das obige Modell zugrunde gelegt wird. **4 BE**

Lösungsvorschlag A12 CO_2-Emissionsrate: FOS12 MT 2016, AI 2

1.0 Betrachtet wird die Funktion $k(t) = a \cdot t^2 \cdot e^{-bt} + 7$ mit $t,a,b \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$, die näherungsweise die weltweiten CO_2-Emissionen beschreibt.

1.1 **Bestimmen der Parameter**

Aus den Angaben lassen sich zwei Gleichungen gewinnen, da die Emissionsrate nach (I) $t = 50$ Jahren, also 2000 bei 30 Mrd. Tonnen und nach (II) $t = 250$ Jahren, also 2200 bei 17,5 Mrd. Tonnen liegen wird:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{(I)} & k(50) = 30 & \\
\iff & a \cdot 50^2 \cdot e^{-b\cdot 50} + 7 = 30 & |-7 \\
\iff & 2500 \cdot a \cdot e^{-50b} = 23 & |:(2500 \cdot e^{-50b}) \\
\iff & a = \dfrac{23}{2500}e^{50b} & \\
\text{(II)} & k(250) = 17{,}5 & \\
\iff & a \cdot 250^2 \cdot e^{-b\cdot 250} + 7 = 17{,}5 & |-7 \\
\iff & 62500 \cdot a \cdot e^{-250b} = 10{,}5 & |:(62500 \cdot e^{-250b}) \\
\iff & a = \dfrac{10{,}5}{62500}e^{250b} &
\end{array}
$$

Beide Gleichungen können nun gleichgesetzt werden:

$$
\begin{array}{lrl}
 & \dfrac{23}{2500}e^{50b} = \dfrac{10{,}5}{62500}e^{250b} & |\cdot e^{-50b} \\
\iff & \dfrac{23}{2500} = \dfrac{10{,}5}{62500}e^{200b} & |\cdot \dfrac{62500}{10{,}5} \\
\iff & \dfrac{1150}{21} = e^{200b} & |\ln(\ ) \\
\iff & 200b = \ln\left(\dfrac{1150}{21}\right) & |:200 \\
\iff & b = \dfrac{1}{200}\ln\left(\dfrac{1150}{21}\right) & \\
\iff & b \approx \underline{0{,}020} &
\end{array}
$$

Einsetzen des ermittelten Wertes in (I):

$$a = \frac{23}{2500}e^{50\cdot 0{,}020} \approx \underline{0{,}025}$$

Der Funktionsterm lautet also $k(t) = 0{,}025 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}02t}$.

1.2.1 **Prognostizierter Wert im Jahr 2017**

Mit den gegebenen Werten für a und b lautet die Funktionsgleichung nun $k(t) = 0{,}025 \cdot t^2 \cdot$

$e^{-0{,}02t} + 7$. Im Jahr 2017 sind also $t = 67$ Jahre vergangen. Durch Einsetzen erhält man den zugehörigen Wert für k:

$$k(67) = 0{,}025 \cdot 67^2 \cdot e^{-0{,}02 \cdot 67} + 7 \approx 36{,}4$$

Die prognostizierte CO_2-Emissionsrate liegt im Jahr 2017 bei etwa 36,4 Mrd. Tonnen.

1.2.2 Ermitteln der ersten Ableitung

Um das Maximum zu bestimmen wird zunächst mithilfe von Produkt- und Kettenregel die erste Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned}
k(t) &= 0{,}025 \cdot t^2 \cdot e^{-0{,}02t} \\
\dot{k}(t) &= 0{,}025 \cdot \left[(t^2)' \cdot e^{-0{,}02t} + t^2 \cdot (e^{-0{,}02t})'\right] && \text{(Ansatz Ketten-/Produktregel)} \\
&= 0{,}025 \cdot (2t \cdot e^{-0{,}02t} + t^2 \cdot e^{-0{,}02t} \cdot (-0{,}02)) && \text{(Anwendung Ketten-/Produktregel)} \\
&= 0{,}025(2t \cdot e^{-0{,}02t} - 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}02t}) && \text{((}2e^{-0{,}02t}\text{) Ausklammern)} \\
&= 0{,}025 \cdot 2e^{-0{,}02t} \cdot (t - 0{,}01t^2) && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= 0{,}05e^{-0{,}02t} \cdot (-0{,}01t^2 + t) && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}$$

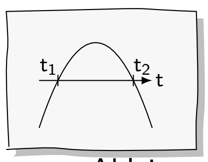
Zeitpunkt der maximalen Emissionsrate

Die Nullstellen der ersten Ableitung entsprechen den möglichen Extremstellen der Funktion. Da die Exponentialfunktion jedoch nie null wird, entsprechen die Nullstellen der ersten Ableitung den Nullstellen des Terms $(t - 0{,}01t^2)$. Formt man diesen um, können die Nullstellen direkt abgelesen werden:

$$t - 0{,}01t^2 = t(1 - 0{,}01t) = 0{,}01t(100 - t)$$

Liegt der Term in der Form $0{,}01t(100-t)$ vor, können die Nullstellen direkt zu $t_1 = 0$ und $t_2 = 100$ abgelesen werden. Da die Exponentialfunktion stets positive Wert annimmt, stimmen das Vorzeichen der ersten Ableitung und das Vorzeichen von $(-0{,}01t^2 + t)$ überein. Es handelt sich dabei um den Term einer nach unten geöffneten Parabel (siehe nebenstehende Skizze).

Skizze



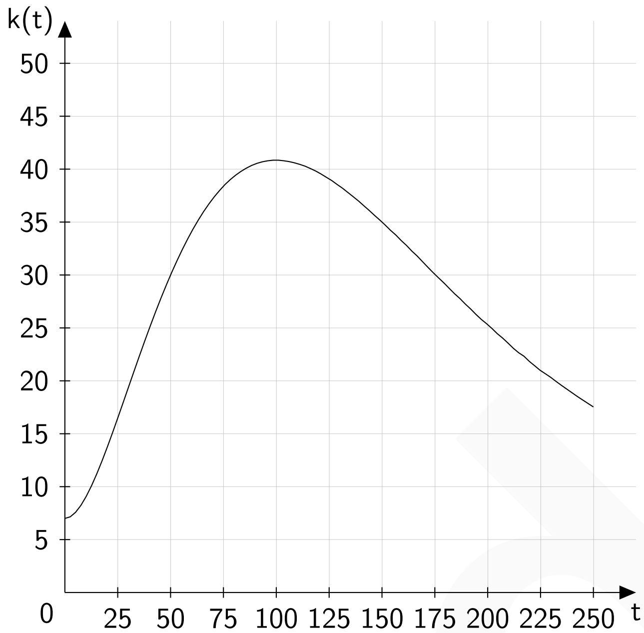
Wie in der Skizze zu sehen ist, liegt bei $t_2 = 100$ ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von „+“ zu „-“ vor. Bei $\underline{t_m = 100}$ liegt also ein Maximum der Funktion. Da es sich neben dem Minimum bei $t = 0$ um die einzige Nullstelle der ersten Ableitung handelt und somit kein weiterer Monotoniewechsel vorliegt, handelt es sich um ein absolutes Maximum. Die absolut maximale CO_2 Emissionsrate ist also im Jahr 2050 zu erwarten.

1.2.3 Graphische Darstellung

mithilfe der bisher bekannten und weiterer Funktionswerte kann zunächst eine Wertetabelle erstellt werden:

t	0	50	100	150	200	250
k(t)	7	30	40,8	35	25,3	17,5

Mit diesen Werten kann die grafische Darstellung erfolgen:



1.2.4 **Jahr der größten Zunahme**

Die größte Zunahme der Emissionsrate entspricht dem Maximum der ersten Ableitung. Um dieses zu finden wird zunächst mithilfe der Ketten- und Produktregel die zweite Ableitung bestimmt:

$$\dot{k}(t) = 0{,}05e^{-0{,}02t} \cdot (-0{,}01t^2 + t)$$

$$\begin{aligned}
\ddot{k}(t) &= 0{,}05\left[(e^{-0{,}02t})' \cdot (-0{,}01t^2 + t) + e^{-0{,}02t} \cdot (-0{,}01t^2 + t)'\right] && \text{(Ans. Ketten-/Produktreg.)}\\
&= 0{,}05 \cdot (e^{-0{,}02t} \cdot (-0{,}02) \cdot (-0{,}01t^2 + t) + e^{-0{,}02t} \cdot (-0{,}01 \cdot 2t + 1)) && \text{(Anwendung)}\\
&= 0{,}05 \cdot (-0{,}02e^{-0{,}02t} \cdot (-0{,}01t^2 + t) + e^{-0{,}02t} \cdot (-0{,}02t + 1)) && \text{((}0{,}02e^{-0{,}02t}\text{) Ausklammern)}\\
&= 0{,}001e^{-0{,}02t} \cdot (0{,}01t^2 - 2t + 50)
\end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion nie null werden kann, entsprechen die Nullstellen der zweiten Ableitung den Nullstellen des Terms $(0{,}01t^2 - 2t + 50)$:

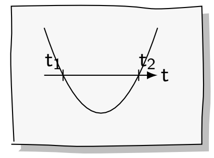
$$\begin{aligned}
t_{1;2} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 0{,}01 \cdot 50}}{2 \cdot 0{,}01}\\
&= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 2}}{0{,}02}
\end{aligned}$$

$$t_1 = 100 - 50\sqrt{2} \quad \text{oder} \quad t_2 = 100 + 50\sqrt{2}$$

$$t_1 \approx 29{,}3 \quad \text{oder} \quad t_2 \approx 170{,}7$$

Da die Exponentialfunktion zudem stets positive Werte annimmt, stimmen die zweite Ableitung und der Term $(0{,}01t^2-2t+50)$ im Vorzeichen überein. Es handelt sich dabei um den Term einer nach oben geöffneten Parabel (siehe nebenstehende Skizze). Wie der Skizze zu entnehmen ist, wechselt das Vorzeichen der zweiten Ableitung dabei bei $\underline{\underline{t = 29{,}3}}$ von „+“ zu „-“, hier liegt also das gesuchte Maximum der ersten Ableitung. 1979 ist also das Jahr, in dem die Emissionsrate am meisten zugenommen hat.

Skizze



1.2.5 **Gesamtausstoß im Jahr 2016**

Die gesamte ausgestoßene Menge entspricht dem Integral über die Funktion $k(t)$, wobei als Integrationsgrenzen der entsprechende Zeitraum gewählt wird. Um also die ausgestoßene Menge im Jahr 2016 zu berechnen, wird von $t = 66$ bis $t = 67$ integriert, da diese Grenzen genau das Jahr 2016 einschließen. Um den Wert des Integrals zu ermitteln wird die gegebene Stammfunktion $K(t)$ verwendet:

$$\begin{aligned}
\int_{66}^{67} k(t)dt &= K(67) - K(66) \\
&= (-1{,}25 \cdot 67^2 - 125 \cdot 67 - 6250) \cdot e^{-0{,}02\cdot 67} + 7 \cdot 67 \\
&\quad - \left((-1{,}25 \cdot 66^2 - 125 \cdot 66 - 6250) \cdot e^{-0{,}02\cdot 66} + 7 \cdot 66\right) \\
&\approx \underline{\underline{36{,}2\,[\text{Mrd. t}]}}
\end{aligned}$$

Im Jahr 2016 werden insgesamt etwa 36,2 Mrd. Tonnen CO_2 ausgestoßen.

Aufgabe 13 - Medikamentenkonzentration (Anwendungsaufgabe): FOS12 MT 2018, AI 2 - adaptiert

Themen: Parameter bestimmen, Extrempunkt, Grenzwert

1.0 Ein Tierarzt verabreicht einer Kuh ein Medikament, dessen Wirkstoff über das Blut auch in die Milch gelangt. Die Konzentration k des Medikaments in der Kuhmilch wird in $\frac{\text{mg}}{\ell}$ (Milligramm pro Liter) angegeben und kann näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:

$k\colon t \longmapsto 5 \cdot t \cdot e^{\frac{1}{\lambda} \cdot t}$ mit $t, \lambda \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0, \lambda < 0$.

Dabei gibt t die Zeit in Stunden ab dem Verabreichen des Medikaments an.
Ergebnisse sind gegebenenfalls auf drei Nachkommastellen zu runden. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

1.1 Bestimmen Sie λ, wenn die Konzentration des Medikaments in der Milch 105 Minuten nach dem Verabreichen 4,88 $\frac{\text{mg}}{\ell}$ beträgt. **3 BE**

1.2.0 Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $\lambda = -3$.

1.2.1 Bestimmen Sie, nach welcher Zeit t_{max} die Konzentration des Medikaments in der Milch der Kuh am größten ist. Geben Sie auch diese maximale Konzentration k_{max} an.
[Mögliches Teilergebnis: $\dot{k}(t) = (5 - \frac{5}{3} \cdot t) \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t}$] **6 BE**

Die Aufgabe 1.2.2 ist nicht mehr relevant.

1.2.3 Überprüfen Sie, ob sich die Konzentration des Medikaments in der Milch im Laufe der Zeit vollständig abbaut. **4 BE**

1.2.4 Die Funktion $L\colon t \longmapsto (-15 \cdot t - 45) \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t}$ mit $D_L = \mathbb{R}$ ist Stammfunktion der Funktion k in $[0; \infty[$ (Nachweis nicht erforgerlich).
Berechnen Sie die mittlere Konzentration des Medikaments in der Milch innerhalb der ersten 8 Stunden nach Verabreichung des Medikaments. **4 BE**

Lösungsvorschlag A13 Medikamentenkonzentration: FOS12 MT 2018, AI 2 - adaptiert

1.0 Betrachtet wird die Funktion $k(t) = 5 \cdot t \cdot e^{\frac{1}{\lambda} \cdot t}$ mit $t,\lambda \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0, \lambda < 0$, die die Konzentration eines Medikaments in Abhängigkeit der Zeit t beschreibt.

1.1 Die Zeit von 105 min wird zunächst in Stunden umgerechnet:

$$t = 105 : 60 = 1{,}75$$

Es ist laut Angabe $k(1{,}75) = 4{,}88$. Damit kann ein Wert für den Parameter λ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
& & k(1{,}75) &= 4{,}88 & & \\
&\Longleftrightarrow & 5 \cdot 1{,}75 \cdot e^{\frac{1}{\lambda} \cdot 1{,}75} &= 4{,}88 & & |:(5 \cdot 1{,}75)\\
&\Longleftrightarrow & e^{\frac{1}{\lambda} \cdot 1{,}75} &= \frac{488}{875} & & |\ln(\ )\\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{\lambda} \cdot 1{,}75 &= \ln\left(\frac{488}{875}\right) & & |\cdot\lambda\\
&\Longleftrightarrow & 1{,}75 &= \lambda \cdot \ln\left(\frac{488}{875}\right) & & |:\ln\left(\frac{488}{875}\right)\\
&\Longleftrightarrow & \lambda &= 1{,}75 : \ln\left(\frac{488}{875}\right) & & \\
&\Longleftrightarrow & \underline{\underline{\lambda}} & \underline{\underline{\approx -2{,}997}} & &
\end{aligned}$$

1.2.0 Im Folgenden ist $\lambda = -3$ und damit $k(t) = 5 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t}$.

1.2.1 **Ermitteln der ersten Ableitung**
Zunächst wird mittels Produkt- und Kettenregel die erste Ableitung bestimmt:

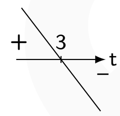
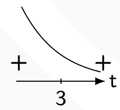
$$\begin{aligned}
k(t) &= 5 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t} & & \\
\dot{k}(t) &= \left[(5 \cdot t)' \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t} + 5 \cdot t \cdot (e^{-\frac{1}{3} \cdot t})'\right] & & \text{(Ansatz Produkt-/Kettenregel)}\\
&= 5 \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t} + 5t \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) & & \text{(Anwendung Produkt-/Kettenregel)}\\
&= 5 \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t} - \frac{5}{3}t \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t} & & (e^{-\frac{1}{3} \cdot t}\text{ ausklammern})\\
&= \left(5 - \frac{5}{3}t\right) \cdot e^{-\frac{1}{3} \cdot t} & & \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}$$

Maximum
Die Exponentialfunktion in der ersten Ableitung ist stets größer als null, weswegen das Vorzeichen der ersten Ableitung vom linearen Term abhängt:

$$\dot{k}(t) = 0$$

$$
\begin{aligned}
&\iff & 5-\frac{5}{3}t &= 0 & &\left|+\frac{5}{3}t\right. \\
&\iff & 5 &= \frac{5}{3}t & &\left|\cdot\frac{3}{5}\right. \\
&\iff & t &= 3
\end{aligned}
$$

Es kann nun eine Vorzeichentabelle erstellt werden:

t	$t<3$	$t=3$	$3<t$	Skizzen
$5-\frac{5}{3}t$	$+$	0	$-$	
$e^{-\frac{1}{3}\cdot t}$	$+$	$+$	$+$	
$\dot{k}(t)$	$+$	0	$-$	
G_k	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	

Es ist also $\underline{\underline{t_{max}=3}}$. Zudem wird der Funktionswert an dieser Stelle ermittelt:

$$k_{max}=k(3)=5\cdot 3\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot 3}=15\cdot e^{-1}\approx \underline{\underline{5{,}518}}$$

1.2.3 Es wird der Grenzwert für $t\to\infty$ bestimmt:

$$t\to\infty:\ k(t)=5\cdot\underbrace{t}_{\to\infty}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{3}t}}_{\to 0^+}\to 0 \quad \text{da e-Fkt. dominiert}$$

Auf lange Sicht wird sich die Konzentration also vollständig abbauen.

1.2.4 Zunächst wird die Gesamtkonzentration berechnet:

$$
\begin{aligned}
L(8)=\int_0^8 k(t)dt=[L(t)]_0^8&=\left((-15\cdot 8-45)\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot 8}-\left((-15\cdot 0-45)\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot 0}\right)\right)\\
&=\left(-165\cdot e^{-\frac{8}{3}}+45\cdot e^{0}\right)\approx 33{,}535
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich die mittlere Konzentration innerhalb der ersten 8 Stunden:

$$\bar{k}=\frac{L(8)}{8}=\frac{33{,}535}{8}\approx\underline{\underline{4{,}192}}$$

Aufgabe 14 - Körpertemperatur (Anwendungsaufgabe): FOS12 MT 2018, AII 3
Themen: Parameter bestimmen

1.0 Ein Tierarzt wurde in ein Waldstück gerufen, um zu helfen, die Wilderei an einem Wildtier aufzuklären, das dort geschossen und aufgefunden wurde. Zur Klärung des Delikts soll der Tatzeitpunkt ermittelt werden. Hierfür spielt folgender funktionaler Zusammenhang eine wichtige Rolle:

$L: t \longmapsto T + (L_0 - T) \cdot e^{-\lambda \cdot t}; t \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dabei ist λ der Abkühlungskoeffizient, T die Umgebungstemperatur in °C, L die Körpertemperatur des erlegten Wildtieres in °C zum Zeitpunkt t und L_0 die gemessene Körpertemperatur des erlegten Wildtieres zum Zeitpunkt t_0, an dem der Tierarzt die Temperatur erstmals gemessen hat. Die Variable t beschreibt die vergangene bzw. vorausgegangene Zeit in Stunden bezüglich des Zeitpunktes t_0.
Die Umgebungstemperatur von 4,0 °C wird dabei als konstant angenommen.
Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
Ergebnisse sind gegebenfalls auf drei Nachkommastellen zu runden.

1.1 Die Körpertemperatur des erlegten Wildtieres betrug $L_0 = 18{,}6\,°C$ zum Zeitpunkt t_0. Zum Zeitpunkt $t_1 = 1{,}0\,h$ war die Körpertemperatur bereits auf $L_1 = 15{,}9\,°C$ gefallen.
Berechnen Sie den Wert für λ und geben Sie die Einheit von λ an. **5 BE**

1.2.0 Im Folgenden sei $\lambda = 0{,}204$.

1.2.1 Es gibt zwei verdächtige Personen, die jedoch vorgeben, nichts mit dem Wilderei zu tun zu haben. Der erste Verdächtige hat für die letzten 3 Stunden und der zweite Verdächtige für die letzten 5 Stunden vor t_0 kein Alibi. Zu früheren Zeitpunkten haben beide Verdächtige ein stichhaltiges Alibi.
Bestimmen Sie den Zeitpunkt des Abschusses in Bezug auf den Zeitpunkt t_0, wenn bei lebenden Wildtieren dieser Art zu dieser Jahreszeit von einer normalen Körpertemperatur von 37,0 °C ausgegangen wird. Entscheiden Sie daraufhin, ob die beiden Verdächtigen unter diesen Annahmen immer noch als Täter infrage kommen würden. **5 BE**

1.2.2 Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem die Abkühlrate des erlegten Wildtieres mehr als ein Grad Celsius pro Stunde beträgt bzw. betragen würde.
Hinwies: Abkühlrate $< -1{,}0\,°C/h$. **6 BE**

Lösungsvorschlag A14 Körpertemperatur: FOS12 MT 2018, AII 3

1.0 Betrachtet wird die Funktion $L(t) = T + (L_0 - T) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, welche die Körpertemperatur des erlegten Wildtieres in °C zum Zeitpunkt t (in Stunden) beschreibt. Dabei ist λ der Abkühlungskoeffizient, T die Umgebungstemperatur in °C und L_0 die gemessene Körpertemperatur zum Zeitpunkt t_0 der ersten Messung.

1.1 **Berechnen des Wertes für λ**

Gegeben ist $T = 4$, $L_0 = 18{,}6$ und der Funktionswert $L_1 = L(t_1) = L(1) = 15{,}9$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& & L(1) &= 15{,}9 & & \\
&\Rightarrow & 4 + (18{,}6 - 4) \cdot e^{-\lambda \cdot 1} &= 15{,}9 & &| - 4 \\
&\Longleftrightarrow & 14{,}6 \cdot e^{-\lambda} &= 11{,}9 & &| : 14{,}6 \\
&\Longleftrightarrow & e^{-\lambda} &= \frac{11{,}9}{14{,}6} & &| \ln(\ ) \\
&\Longleftrightarrow & -\lambda &= \ln\left(\frac{11{,}9}{14{,}6}\right) & &| \cdot (-1) \\
&\Longleftrightarrow & \lambda &= -\ln\left(\frac{11{,}9}{14{,}6}\right) & & \\
&\Longleftrightarrow & \underline{\underline{\lambda}} &\underline{\underline{\approx 0{,}204}} & &
\end{aligned}$$

Einheit des Parameters λ

Im Exponent steht das Produkt $\lambda \cdot t$. Da der Exponent einheitenlos sein muss, müssen sich die Einheit gegenseitig kürzen. Die Zeit hat die Einheit h, weshalb die Einheit von λ $\frac{1}{h}$ sein muss.

1.2.1 Gesucht ist die Zeit t für die $L(t) = 37$ ist. Wieder wird eingesetzt und umgeformt:

$$\begin{aligned}
& & L(t) &= 37 & & \\
&\Longleftrightarrow & 4 + (18{,}6 - 4) \cdot e^{-0{,}204t} &= 37 & &| - 4 \\
&\Longleftrightarrow & 14{,}6 \cdot e^{-0{,}204t} &= 33 & &| : 14{,}6 \\
&\Longleftrightarrow & e^{-0{,}204t} &= \frac{33}{14{,}6} & &| \ln(\ ) \\
&\Longleftrightarrow & -0{,}204t &= \ln\left(\frac{33}{14{,}6}\right) & &| : (-0{,}204) \\
&\Longleftrightarrow & t &= -\frac{1}{0{,}204} \ln\left(\frac{33}{14{,}6}\right) & & \\
&\Longleftrightarrow & t &\approx -3{,}997 & &
\end{aligned}$$

Der Abschusszeitpunkt liegt also etwa 4 Stunden zurück. Der erste Verdächtige kommt also nicht mehr in Frage, der zweite jedoch schon.

1.2.2 Der Funktionsterm wird mit allen eingesetzten Werten aufgeschrieben, sodass die erste Ableitung berechnet werden kann:

$$L(t) = T + (L_0 - T) \cdot e^{-\lambda \cdot t} = 4 + 14{,}6 \cdot e^{-0{,}204 \cdot t}$$
$$\dot{L}(t) = 14{,}6 \cdot e^{-0{,}204 \cdot t} \cdot (-0{,}204) = -2{,}9784 \cdot e^{-0{,}204 \cdot t}$$

Gesucht ist nun für welche Werte von t die Abkühlrate mehr als ein Grad Celsius pro Stunde beträgt, für welche t also $\dot{L}(t) < -1$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
& & \dot{L}(t) &< -1 & & \\
&\iff & -2{,}9784 \cdot e^{-0{,}204 \cdot t} &< -1 & & \mid : (-2{,}9784) \\
&\iff & e^{-0{,}204 \cdot t} &> \frac{1250}{3723} & & \mid \ln(\ ) \\
&\iff & -0{,}204 \cdot t &> \ln\left(\frac{1250}{3723}\right) & & \mid : (-0{,}204) \\
&\iff & t &< -\frac{1}{0{,}204} \cdot \ln\left(\frac{1250}{3723}\right) \approx 5{,}350 & &
\end{aligned}$$

Im Zeitraum des Abschusses bis 5,35 h $\mathrel{\hat{=}}$ 5 h 21 min nach t_0 beträgt die Abkühlrate mindestens 1 Grad Celsius pro Stunde.

ÜBUNGSTEIL Analytische Geometrie - FOS12 Technik

Aufgabe 1 - Original-Prüfung FOS12 MT 2017, Analytische Geometrie-Teil BI

1.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{c_p} = \begin{pmatrix} p+4 \\ 2p \\ 3-4p \end{pmatrix} \text{ mit } p \in \mathbb{R} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

1.1 Bestimmen Sie den Wert des Parameters p, für den die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c_p}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. **4 BE**

1.2 Drücken Sie den Vektor $\vec{d}$ durch eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c_{-2}}$ (d.h. für $p = -2$) aus. **4 BE**

2.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die Geraden g_q und h gegeben:

$$g_q : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3q-1 \\ 2q \\ q+1 \end{pmatrix} \text{ mit } q, \lambda \in \mathbb{R}; \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R}.$$

2.1 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der zwei Geraden g_q und h in Abhängigkeit von q. **10 BE**

2.2.0 Setzen Sie nun $q = -1$.

2.2.1 Ermitteln Sie den Schnittwinkel der Geraden g_{-1} und h auf eine Nachkommastelle gerundet. **4 BE**

2.2.2 Die Gerade g_{-1} und h legen eine Ebene E fest. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameterform und in Normalenform. **3 BE**

3 Die Kirchturmspitze eines Dorfes sei der Punkt $K(-2\,|\,9\,|\,32)$. Ein neugieriger Mensch steuert in dem Dorf eine Drohne entlang einer Geraden durch den Punkt

$P(2\,|\,0\,|\,1{,}5)$ in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Bei der Betrachtung wird ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde gelegt.
Die Koordinaten sind alle in Metern angegeben, auf das Mitführen der Einheit Meter kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

Berechnen Sie die kürzeste Entfernung der Drohne von der Kirchturmspitze. **5 BE**

Lösungsvorschlag A1: Original-Prüfung FOS12 MT 2017, Analytische Geometrie-Teil BI

1.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c}_p = \begin{pmatrix} p+4 \\ 2p \\ 3-4p \end{pmatrix}$ mit $p \in \mathbb{R}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ gegeben.

1.1 **Wert für p für den eine Basis vorliegt**

Zunächst wird mithilfe des Kreuzproduktes ein Vektor bestimmt, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - (-3 \cdot 0) \\ -3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt dieses Vektors mit dem Vektor $\vec{c}_p$ muss ungleich null sein, wenn die drei Vektoren linear unabhängig sein sollen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \\ -8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} p+4 \\ 2p \\ 3-4p \end{pmatrix} &\neq 0 \\ \Longleftrightarrow \quad 4p + 16 - 28p - 24 + 32p &\neq 0 \\ \Longleftrightarrow \quad 8p - 8 &\neq 0 \qquad | +8 \\ \Longleftrightarrow \quad 8p &\neq 8 \qquad | :8 \\ \Longleftrightarrow \quad p &\neq 1 \end{aligned}$$

Die Vektoren bilden für $\underline{\underline{p \neq 1}}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

1.2 **Linearkombination**

Es sind Werte k_1, k_2 und k_3 gesucht, für die die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{b} + k_3 \cdot \vec{c}_{-2} = k_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + k_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix} = \vec{d}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \cdot k_1 + 4 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 \\ 2 \cdot k_1 + 0 \cdot k_2 - 4 \cdot k_3 \\ -3 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + 11 \cdot k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Daraus kann die Vorzeichenmatrix erstellt werden, die dann mithilfe des Gauß-Verfahrens weiter umgeformt wird:

$$\begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} k_1 & k_2 & k_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & 11 & -3 \end{array}\right) \end{array}$$

$$
\begin{array}{lccc}
\iff & \begin{array}{r} \\ \mathrm{II}' \\ \mathrm{III}' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & 8 & 8 & -12 \\ 0 & 14 & 17 & -18 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ 2\cdot \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ 3\cdot \mathrm{I}+\mathrm{III} \end{array} \\
\iff & \begin{array}{r} \\ \mathrm{II}'' \\ \mathrm{III}'' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 14 & 17 & -18 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \frac{1}{4}\cdot \mathrm{II}' \\ \mathrm{III}' \end{array} \\
\iff & \begin{array}{r} \\ \\ \mathrm{III}''' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ 7\cdot \mathrm{II}''-\mathrm{III}'' \end{array}
\end{array}
$$

Aus der Zeile III"' folgt nun:

$$
\begin{aligned}
-3k_3 &= -3 \qquad |:(-3) \\
\iff \quad \underline{k_3} &\underline{= 1}
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in Zeile II" gilt:

$$
\begin{aligned}
2k_2 + k_3 &= -3 \\
\iff \quad 2k_2 + 2 &= -3 \qquad |-2 \\
\iff \quad 2k_2 &= -5 \qquad |:2 \\
\iff \quad \underline{k_2} &\underline{= -\frac{5}{2}}
\end{aligned}
$$

Einsetzen beider Werte in die erste Zeile:

$$
\begin{aligned}
k_1 + 4k_2 + 2k_3 &= -5 \\
\iff \quad k_1 - 10 + 2 &= -5 \qquad |+8 \\
\iff \quad \underline{k_1} &\underline{= 3}
\end{aligned}
$$

Die Linearkombination der Vektoren lautet somit also:

$$
\underline{\underline{\vec{d} = 3\cdot\vec{a} - \frac{5}{2}\vec{b} + \vec{c}_{-2}}}
$$

2.0 Gegeben sind die Geraden $g_q: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3q-1 \\ 2q \\ q+1 \end{pmatrix}$ mit $q,\lambda \in \mathbb{R}$ und

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$.

2.1 **Untersuchung der gegenseitigen Lage**

Zunächst wird überprüft, ob die Geraden parallel sind, indem man bestimmt, ob die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind:

$$\begin{pmatrix} 3q-1 \\ 2q \\ q+1 \end{pmatrix} = \varepsilon \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zeilenweise ergeben sich so drei Gleichungen. Aus der zweiten Zeile $2q = 0\varepsilon$ kann direkt abgelesen, dass $q = 0$ sein muss. Setzt man dies in die dritte Zeile ein, folgt:

$$q+1 = 0+1 = 1 = -\varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \varepsilon = -1$$

Beide ermittelte Werte werden nun für die Probe in die erste Zeile eingesetzt:

$$3q-1 = \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad 3\cdot 0 - 1 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 = -1$$

Das Einsetzen führt zu einer wahren Aussage. Die Geraden sind für $q = 0$ also parallel. Zusätzlich wird überprüft, ob die Geraden identisch oder echt parallel sind, dazu überprüft man ob der Punkt des Ortsvektors der Geraden g_0 auf der Geraden h liegt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

In der zweiten Zeile steht nun $1 = 2 + 0\mu$, was offensichtlich falsch ist. Die Geraden sind nicht identisch, sondern verlaufen für $q = 0$ echt parallel.

Außerdem wird geprüft, ob die Geraden für andere Werte als $q = 0$ einen Schnittpunkt haben, indem man die Geradengleichungen gleichsetzt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3q-1 \\ 2q \\ q+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Auch hier kann wieder zeilenweise betrachtet werden. Aus der zweiten Zeile folgt:

$$\begin{aligned} && 1 + 2\lambda q &= 2 && \mid -1 \\ \Longleftrightarrow && 2\lambda q &= 1 && \mid : 2 \\ \Longleftrightarrow && \lambda q &= \frac{1}{2} && \end{aligned}$$

Dieser Term kann nun in der ersten Zeile ersetzt werden:

$$\begin{aligned} && 3\lambda q - \lambda &= 1 + \mu && \\ \Longleftrightarrow && \frac{3}{2} - \lambda &= 1 + \mu && \mid -1 \\ \Longleftrightarrow && \mu &= \frac{1}{2} - \lambda && \end{aligned}$$

Beide ermittelte Ausdrücke werden schließlich in die dritte Zeile eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
& & q+\lambda q+\lambda &= -\mu & \\
&\iff & q+\frac{1}{2}+\lambda &= -\frac{1}{2}+\lambda & \quad |-\lambda \\
&\iff & q+\frac{1}{2} &= -\frac{1}{2} & \quad |-\frac{1}{2} \\
&\iff & q &= -1 &
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich die Lösung $q = -1$. Demnach schneiden sich die Geraden g_{-1} und h, die Geraden q_0 und h verlaufen echt parallel und alle Geraden g_q für $q \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ verlaufen windschief zu h.

2.2.1 **Schnittwinkel der beiden Geraden**

Um den Winkel zwischen den beiden Geraden zu bestimmen, wird mit den Richtungsvektoren der Geraden g_{-1} und h gerechnet:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}-4\\-2\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-4\\-2\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-4\cdot 1-2\cdot 0+0\cdot(-1)|}{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+0^2}\cdot\sqrt{1^1+0^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{40}}$$

Der Winkel ergibt sich demnach zu $\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{40}}\right) \approx \underline{\underline{50{,}8^\circ}}$.

2.2.2 **Ebenengleichung in Parameterform**

Eine Ebenengleichung in Parameterform kann aufgestellt werden, indem man den Stützvektor einer der beiden Geraden wählt und als Richtungsvektoren der Ebene die beiden Richtungsvektoren der Geraden einsetzt:

$$\underline{\underline{E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix}-4\\-2\\0\end{pmatrix}}} \quad \text{mit } \sigma,\tau \in \mathbb{R}$$

Ebenengleichung in Normalenform

Um die Normalengleichung der Ebene zu bestimmen, wird aus dem Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren der Normalenvektor der Ebene bestimmt:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot 0-(-1)\cdot(-2)\\(-1)\cdot(-4)-1\cdot 0\\1\cdot(-2)-0\cdot(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}$$

Mit dem Normalenvektor und dem Ortsvektor kann die Normalenform der Ebene angegeben werden:

$$\underline{\underline{E: \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0}}$$

3 **Kürzeste Entfernung zwischen Drohnen und Kirchturmspitze**

Aus dem gegebenen Punkt P und der Flugrichtung der Drohne, kann man zunächst eine Geradengleichung aufstellen, die die Flugbahn f beschreibt:

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \omega \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \omega \in \mathbb{R}$$

Als nächstes wird eine Hilfsebene erstellt, sodass die Ebene senkrecht zur Flugbahn und durch den Punkt der Kirchturmspitze verläuft. Da die Ebene senkrecht auf der Geraden stehen soll, kann als Normalenvektor der Ebene der Richtungsvektor der Geraden gewählt werden. Als Punkt der Ebene wählt man K, damit kann die Ebenengleichung in Normalenform gebildet werden:

$$H: \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 32 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Nun wird die Flugbahn f mit der Hilfsebene H geschnitten, um den Lotfußpunkt M zu erhalten. Dazu setzt man in die Ebenengleichung nun anstelle von $\vec{x}$ die Gleichung der Geraden ein.

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + \omega \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 32 \end{pmatrix} \right) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 - \omega \\ -9 + 2\omega \\ -30{,}5 + 6\omega \end{pmatrix} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & -4 + \omega - 18 + 4\omega - 183 + 36\omega = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & -205 + 41\omega = 0 \qquad |+205 \\
\Longleftrightarrow \quad & 41\omega = 205 \qquad |:41 \\
\Longleftrightarrow \quad & \underline{\omega = 5}
\end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punktes M auf f mit minimalem Abstand zu K ergeben sich, indem man nun $\omega = 5$ in die Geradengleichung einsetzt:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 31{,}5 \end{pmatrix}$$

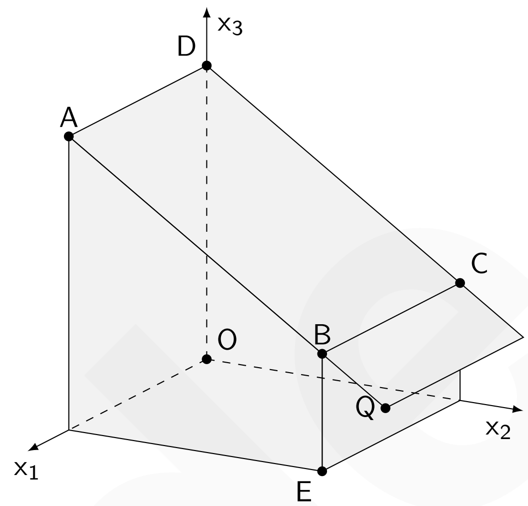
Mit diesen Koordinaten kann schließlich das Maß des minimalen Abstands zum Kirchturm bestimmt werden:

$$d = |\overrightarrow{MK}| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 32 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 31{,}5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0{,}5^2} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$$

Die kürzeste Entfernung der Drohne von der Kirchturmspitze sind $\underline{\underline{1{,}5\,\text{m}}}$.

Aufgabe 2 - Original-Prüfung FOS12 MT 2017, Analytische Geometrie-Teil BII

1.0 Die Abbildung zeigt einen Wintergarten, dessen Boden in der $x_1 - x_2-$ Ebene eines kartesischen Koordinatensystems liegt.
Das rechteckige Glasdach ABCD ist von einer Markise bedeckt. Dabei wird der Abstand zwischen Glasdach und Markise vernachlässigt. Die Ebene, in der die Markise liegt, wird mit M bezeichnet. Folgende Punkte des Wintergartens sind gegeben: $A(5|0|5)$, $B(5|4|2)$, $D(0|0|5)$ und $E(5|4|0)$. Alle Koordinaten sind in Metern angegeben. Auf das Mitführen der Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.



1.1 Die Markise lässt sich in Verlängerung des Glasdaches über die untere Dachkante [BC] um 1,25 m bis zum Punkt Q (siehe Skizze) ausfahren.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q. [Ergebnis: $Q(5|5|1{,}25)$] **4 BE**

1.2 Geben Sie eine Gleichung der Ebene M in Parameterform an und formen Sie diese in eine Koordinatenform um.
[Mögliches Teilergebnis: M: $3x_2 + 4x_3 - 20 = 0$] **4 BE**

1.3 Berechnen Sie das Volumen des Wintergartens in m^3. **4 BE**

1.4 Mithilfe zweier Drahtseile, die an den schrägen Dachstreben [AB] und [DC] befestigt werden, soll eine Leuchte im Wintergarten im Punkt $U(2{,}4|1{,}5|2{,}8)$ aufgehängt werden. Ermitteln Sie die Mindestlänge des Drahtseils, das an der Strebe befestigt wird, welche weiter von U entfernt ist.
Runden Sie das Ergebnis auf cm. **6 BE**

1.5.0 Damit sich der Wintergarten bei Sonnenschein nicht zu stark aufheizt, ist die Markise jetzt bis zum Punkt Q ausgefahren. Die Richtung der einfallenden Sonnenstrahlen

wird durch den Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}8 \\ -1{,}4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

1.5.1 Ohne Markise verliefe der Sonnenstrahl s durch den Punkt E. Geben Sie eine Gleichung für die Gerade s an und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts T von s mit der Markisenebene M. [Ergebnis: $T(4|4{,}8|1{,}4)$] **4 BE**

1.5.2 Erläutern Sie ohne Rechnung, ob der Punkt E bei diesem Sonnenstand im Schatten der ausgefahrenen Markise liegt. **2 BE**

1.6 Im Punkt $K(2|0|0)$ befindet sich eine Lichtquelle. Ihr Strahl wir am Glasdach des Wintergartens im Punkt $R(1|2|3{,}5)$ reflektiert. Ermitteln Sie durch geeignete Spiegelung eine Gleichung der Geraden, die den reflektierten Lichtstrahl beschreibt. **6 BE**

Lösungsvorschlag A2: Original-Prüfung FOS12 MT 2017, Analytische Geometrie-Teil BII

1.0 Betrachtet wird ein Wintergarten, dessen folgende Punkte gegeben sind: A (5 | 0 | 5), B (5 | 4 | 2), D (0 | 0 | 5) und E (5 | 4 | 0).

1.1 **Koordinaten des Punktes Q**

Zunächst wird der Vektor $\overrightarrow{AB}$ und dessen Länge bestimmt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Der Abstand zwischen A und B ist 5 m, die Markise wird über B hinaus um 1,25 m verlängert. Dies entspricht $\frac{1{,}25}{5} = \frac{1}{4}$ mal dem Abstand zwischen A und B. Damit können die Koordinaten des Punktes Q bestimmt werden:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+0 \\ 4+1 \\ 2-0{,}75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1{,}25 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Punktes lauten $\underline{\underline{Q\,(\,5\,|\,5\,|\,1{,}25)}}$.

1.2 **Ebenengleichung in Parameterform**

Die Gleichung der Ebene M in Parameterform wird aus den Koordinaten der Punkte A, B und D erstellt, da diese alle in der Ebene liegen:

$$M : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} + \mu \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5-5 \\ 4-0 \\ 2-5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0-5 \\ 0-0 \\ 5-5 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad \text{mit } \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

Ebenengleichung in Koordinatenform

Aus dem Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren der Ebene kann der Normalenvektor bestimmt werden:

$$\vec{n}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 - (-3) \cdot 0 \\ (-3) \cdot (-5) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 4 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Mit dem Normalenvektor und den Koordinaten des Punktes A kann nun zunächst die Normalenform der Ebene aufgestellt werden, die schließlich zur Koordinatenform umgeformt wird:

$$M : \vec{n}_M \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 0 \\ x_3 - 5 \end{pmatrix} = 15x_2 + 20x_3 - 100 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underline{M : 3x_2 + 4x_3 - 20 = 0}$$

1.3 **Volumen des Wintergartens**

Im Folgenden beschreibt der Punkt F den Lotfußpunkt von A auf die x_1-Achse. Der Punkt F ist also die Ecke des Wintergartens, die auf der x_1-Achse liegt und hat die Koordinaten $F\,(\,5\,|\,0\,|\,0)$. Zunächst wird der Flächeninhalt des Trapezes ABFE ermittelt:

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{1}{2}\cdot(|\overrightarrow{AF}|+|\overrightarrow{BE}|)\cdot|\overrightarrow{FE}| = \frac{1}{2}\left(\left|\begin{pmatrix}5-5\\0-0\\0-5\end{pmatrix}\right|+\left|\begin{pmatrix}5-5\\4-4\\0-2\end{pmatrix}\right|\right)\cdot\left|\begin{pmatrix}5-5\\4-0\\0-0\end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{(-5)^2}+\sqrt{(-2)^2}\right)\cdot\sqrt{4^2} = \frac{1}{2}\cdot(5+2)\cdot 4 = 14\,[\mathrm{m}^2] \end{aligned}$$

Der Wintergarten kann nun als Prisma betrachtet werden, dessen Grundfläche das berechnete Trapez ist, da die Deckfläche identisch zur Grundfläche ist:

$$V = A_T\cdot h = A_T\cdot|\overrightarrow{OF}| = A_T\cdot\left|\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 14\cdot 5 = 70\,[\mathrm{m}^3]$$

Der Wintergarten hat ein Volumen von $\underline{70\,\mathrm{m}^3}$.

1.4 **Mindestlänge des Seils**

Es wird zunächst die Gleichung einer Geraden ℓ durch die Punkte A und B bestimmt:

$$\ell\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA}+\omega\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\0\\5\end{pmatrix}+\omega\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\quad \text{mit } \omega\in\mathbb{R}$$

Zudem wird eine Hilfsebene H konstruiert, die senkrecht zur Geraden durch A und B verläuft, indem man den Richtungsvektor der Gerade als Normalenvektor der Ebene wählt. Da die Hilfsebene zusätzlich durch den Punkt U verlaufen soll, werden dessen Koordinaten und der Normalenvektor zum Aufstellen der Normalengleichung verwendet:

$$H\colon \overrightarrow{AB}\circ(\vec{x}-\overrightarrow{OU}) = \begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\circ\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}2{,}4\\1{,}5\\2{,}8\end{pmatrix}\right) = 0$$

Nun wird die Hilfsebene mit der Geraden ℓ geschnitten um den Lotfußpunkt L zu erhalten. Dazu wir die Gerade ℓ in die Ebene H eingesetzt:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}5\\0\\5\end{pmatrix}+\omega\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2{,}4\\1{,}5\\2{,}8\end{pmatrix}\right) = 0 \\ \iff\quad & \begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2{,}6\\-1{,}5+4\omega\\2{,}2-3\omega\end{pmatrix} = 0 \\ \iff\quad & -6+16\omega-6{,}6+9\omega = 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad && -12{,}6 + 25\omega &= 0 && \mid +12{,}6 \\
\Longleftrightarrow \quad && 25\omega &= 12{,}6 && \mid : 25 \\
\Longleftrightarrow \quad && \underline{\omega = 0{,}504} &&
\end{aligned}
$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung der Gerade ein, ergeben sich die Koordinaten des Punktes L, der auf der Geraden zwischen A und B liegt und den kürzesten Abstand zu U hat:

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 0{,}504 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2{,}016 \\ 3{,}488 \end{pmatrix}$$

Schließlich kann der Abstand zwischen den beiden Punkte L und U bestimmt werden, der dem kürzesten Abstand zwischen U und der Strebe [AB] entspricht:

$$d = |\overrightarrow{LU}| = \left| \begin{pmatrix} 2{,}4 - 5 \\ 1{,}5 - 2{,}016 \\ 2{,}8 - 3{,}488 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2{,}6 \\ -0{,}516 \\ -0{,}688 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2{,}6)^2 + (-0{,}516)^2 + (-0{,}688)^2} \approx 2{,}74$$

Das Drahtseil zur Strebe [AB] hat eine Mindestlänge von $\underline{\underline{2{,}74\,\text{m}}}$.

1.5.1 **Gleichung der Gerade s**

Aus der Angabe ist bekannt, in welche Richtung der Sonnenstrahl einfällt und dass er durch den Punkt E verläuft. Damit kann sofort die Geradengleichung angegeben werden:

$$s : \vec{x} = \overrightarrow{OE} + \tau \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}8 \\ -1{,}4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \tau \in \mathbb{R}$$

Koordinaten des Schnittpunktes T

Um den Schnittpunkt zwischen s und M zu bestimmen, wird die Gerade s Komponentenweise in die Koordinatenform der Ebene M eingesetzt und dann nach τ aufgelöst:

$$
\begin{aligned}
&& 3x_2 + 4x_3 - 20 &= 0 && \\
\Longleftrightarrow \quad && 3(4 - 0{,}8\tau) + 4(0 - 1{,}4\tau) - 20 &= 0 && \\
\Longleftrightarrow \quad && 12 - 2{,}4\tau - 5{,}6\tau - 20 &= 0 && \mid +8 \\
\Longleftrightarrow \quad && -8\tau &= 8 && \mid : (-1) \\
\Longleftrightarrow \quad && \tau &= -1 &&
\end{aligned}
$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung von s ein, ergeben sich die Koordinaten des Punktes T:

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}8 \\ -1{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4{,}8 \\ 1{,}4 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes lauten $\underline{\underline{T\,(\,4 \mid 4{,}8 \mid 1{,}4)}}$.

1.5.2 **Begründung, dass E im Schatten liegt**

Um eine Aussage treffen zu können, werden die Koordinaten der Punkt T und Q verglichen. Die x_1- und x_2-Koordinaten von T sind beide positiv, und beide kleiner als die jeweiligen Koordinaten des Punktes Q. Demnach liegt der Schnittpunkt von s mit M auf der Markise. Damit erreicht der Sonnenstrahl nicht den Punkt E. Der Punkt E liegt also im Schatten.

1.6 **Gleichung des reflektierten Lichtstrahls**

Zunächst wird der Spiegelpunkt K∗ des Punktes K an der Ebene M bestimmt. Dafür wird die Gleichung einer Hilfsgeraden h aufgestellt, welche senkrecht zur Ebene und durch den Punkt K verläuft. Um dies zu gewährleisten, wird als Ortsvektor der Gerade der Ortsvektor von K und als Richtungsvektor der Gerade der Normalenvektor der Ebene gewählt:

$$h : \vec{x} = \overrightarrow{OK} + \sigma \cdot \vec{n}_M = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \sigma \in \mathbb{R}$$

Die Geradengleichung wird nun Koordinatenweise in die Ebenengleichung M eingesetzt, um den Schnittpunkt zu bestimmen. Dafür wird nach σ umgeformt:

$$\begin{aligned} & & 3x_2 + 4x_3 - 20 &= 0 & \\ &\Longleftrightarrow & 3(0+15\sigma) + 4(0+20\sigma) - 20 &= 0 & \quad |+20 \\ &\Longleftrightarrow & 45\sigma + 80\sigma &= 20 & \quad |:125 \\ &\Longleftrightarrow & \sigma &= \frac{20}{125} & \\ &\Longleftrightarrow & \sigma &= \frac{4}{25} & \end{aligned}$$

Addiert man also zum Ortsvektor von K das $\frac{4}{25}$-fache des Richtungsvektors der Geraden, erreicht man den Schnittpunkt, der auf der Ebene liegt. Um den an der Ebene gespiegelten Punkt K∗ zu bestimmen, wird also das doppelte des Richtungsvektors addiert:

$$\overrightarrow{OK*} = \overrightarrow{OK} + 2 \cdot \frac{4}{25} \cdot \vec{n}_M = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{4}{25} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4{,}8 \\ 6{,}4 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Spiegelpunktes von K an M lauten also $K*(\,2\,|\,4{,}8\,|\,6{,}4)$. Der reflektierte Lichtstrahl verläuft nun zwischen den Punkten R und K∗, sodass mithilfe der ermittelten Koordinaten eine Geradengleichung des reflektierten Lichtstrahls aufgestellt werden kann:

$$r : \vec{x} = \overrightarrow{OR} + \varphi \cdot \overrightarrow{K*R} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4{,}8-2 \\ 6{,}4-3{,}5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2{,}8 \\ -2{,}9 \end{pmatrix}}} \quad \text{mit } \varphi \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 1 - Original-Prüfung FOS12 MT 2018, Analytische Geometrie-Teil BI

1.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die drei linear unabhängigen Vektroen $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ gegeben. Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Aussagen stets richtig, möglich oder immer falsch sind.

1.1 $\left|\vec{a} \mathrm{x} \vec{b}\right| > 0$ **2 BE**

1.2 $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$ **2 BE**

1.3 $\left|(\vec{a} \mathrm{x} \vec{b}) \circ \vec{c}\right| = \left|(\vec{a} \mathrm{x} \vec{c}) \circ \vec{b}\right|$ **2 BE**

1.4 Es existiert eine Ebene, in der alle drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen. **2 BE**

1.5 Es gibt einen Vektor im $\mathbb{R}^3$, der sich nicht als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden lässt. **2 BE**

2.0 Ein Speichenreflektor für ein Fahrrad beruht auf dem Prinzip eines Tripelspiegels. Dieser reflektiert einfallende Strahlung unabhängig von seiner Ausrichtung weitgehend zurück zur Strahlungsquelle. Erreicht wird dieser Effekt durch drei ebene Spiegel, die aufeinander senkrecht stehen. Die drei Koordinatenebenen des $\mathbb{R}^3$ mit den Gleichungen in Koordinatenform $E_{23} : x_1 = 0, E_{13} : x_2 = 0$ und $E_{12} : x_3 = 0$ bilden zusammen einen derartigen Tripelspiegel.

2.1 Ein vom Punkt $A\,(\,7\,|\,12\,|\,2)$ in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ausgehender Lichtstrahl trifft im Punkt S auf die Ebene E_{12}. Geben Sie eine Gleichung für die Gerade g_0 an, auf welcher der Lichtstrahl verläuft. Zeigen Sie, dass gilt: $S\,(\,5\,|\,8\,|\,0)$. **4 BE**

2.2 Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g_1, auf der der an der Ebene E_{12} reflektierte Strahl verläuft.

[Mögliches Teilergebnis: $g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$] **6 BE**

2.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass bei der Reflexion des Lichtstrahls an E_{12} der Einfallswinkel gleich dem Ausfallswinkel ist. **5 BE**

2.4 Berechnen Sie den Abstand von g_1 zur Ecke des Tripelspiegels, die sich im Urspsrung des Koordinatensystems befindet. **5 BE**

Lösungsvorschlag A1: Original-Prüfung FOS12 MT 2018, Analytische Geometrie-Teil BI

1.0 Gegeben sind drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ im $\mathbb{R}^3$.

1.1 Die Aussage ist stets richtig.

Das Vektorprodukt und damit der Betrag des resultierenden Vektors wird nur null, wenn beide Vektoren parallel sind. Dies ist jedoch ausgeschlossen, da die Vektoren linear unabhängig sind.

1.2 Die Aussage ist möglich.

Das Skalarprodukt ist null, wenn die zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Dies kann erfüllt sein, ist aber nicht zwingend der Fall.

1.3 Die Aussage ist richtig.

Dargestellt ist der Betrag des Spatproduktes der drei Vektoren. Dieser Betrag entspricht dem Volumen des Spats, das die drei Vektoren aufspannen. Dieses Volumen ist unabhängig von der Reihenfolge der vorkommenden Vektoren, weshalb die Beträge auf beiden Seiten der Gleichung gleich sind.

1.4 Die Aussage ist falsch.

Liegen drei Vektoren in einer Ebene, dann sind sie immer linear abhängig. Da die gegebenen Vektoren allerdings linear unabhängig sind, können sie nicht alle drei in einer Ebene liegen.

1.5 Die Aussage ist falsch.

Drei linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Jeder andere Vektor im $\mathbb{R}^3$ kann als Linearkombination dieser Basis dargestellt werden.

2.0 Gegeben sind die drei Koordinatenebenen des $\mathbb{R}^3$ mit den Gleichungen $E_{23} : x_1 = 0$, $E_{13} : x_2 = 0$ und $E_{12} : x_3 = 0$.

2.1 **Angabe der Geradengleichung**

Als Ortsvektor der Geradengleichung wird $\overrightarrow{OA}$ verwendet und als Richtungsvektor der Vektor $\vec{v}$. Dann gilt für die Gleichung der Gerade:

$$g_0 : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{v} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

Berechnen des Schnittpunktes S

Um den Schnittpunkt zu bestimmen, wird die Gleichung der Gerade komponentenweise in die

Gleichung der Ebene E_{12} eingesetzt:

$$\begin{aligned} && x_3 &= 0 \\ \Longleftrightarrow && 2-\lambda &= 0 \qquad \mid +\lambda \\ \Longleftrightarrow && \lambda &= 2 \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung der Gerade ein, ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunktes S:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S\,(\,5\,|\,8\,|\,0)}} \qquad \text{(q.e.d)}$$

2.2 Im Folgenden sollen zwei Möglichkeiten beschrieben werden die gesuchte Geradengleichung zu finden.

Alternative 1:

Dabei handelt es sich um die übliche Methode solche Art Aufgaben zu lösen. Der reflektierte Strahl verläuft durch die Punkte S und A'. Um die Koordinaten des Spiegelpunktes A' zu finden, wird eine Hilfsgerade h (Lotgerade) betrachtet. Diese verläuft senkrecht zur Spiegelebene und durch den Punkt A:

$$h : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \mu \cdot \vec{n}_{E_{12}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \mu \in \mathbb{R}$$

Zunächst wird nun der Schnittpunkt der Hilfsgerade mit der Ebene E_{12} berechnet, indem man komponentenweise einsetzt:

$$\begin{aligned} && x_3 &= 0 \\ \Longleftrightarrow && 2+\mu &= 0 \qquad \mid -2 \\ \Longleftrightarrow && \mu &= -2 \end{aligned}$$

Setzt man in die Hilfsgerade den Wert $\mu = -2$ ein, erhält man die Koordinaten eines Punktes auf der Ebene E_{12}. Um die Koordinaten des Spiegelpunktes zu erhalten, muss man also $\mu = 2 \cdot (-2) = -4$ in die Geradengleichung einsetzen:

$$\overrightarrow{OA'} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Gleichung der Gerade des reflektierten Strahls:

$$g_1 : \vec{x} = \overrightarrow{OS} + \sigma \cdot \overrightarrow{A'S} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}} \quad \text{mit } \sigma \in \mathbb{R}$$

Alternative 2: (Sonderfall)
Da in diesem Fall eine Spiegelung an der x_1x_2-Ebene vorgenommen wird, genügt es beim Ortsvektor $\vec{v}$ des Lichtstrahls das Vorzeichen der x_3-Komponente zu ändern um den Richtungsvektor $\vec{v}*$ des reflektierten Lichtstrahls zu erhalten. Dann gilt für die Gleichung der Gerade des reflektierten Lichtstrahls:

$$g_1 : \vec{x} = \overrightarrow{OS} + \sigma \cdot \vec{v}* = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}} \quad \text{mit } \sigma \in \mathbb{R}$$

2.3 Im Folgenden ist α der Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Gerade des einfallenden Strahles und dem Normalenvektor $\vec{n}_{E_{12}}$ und β der Winkel zwischen dem Richtungsvektor der Gerade des reflektierten Strahls und dem Normalenvektor $\vec{n}_{E_{12}}$.

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|2|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2}} = \frac{2}{\sqrt{24}} = \frac{2}{\sqrt{4 \cdot 6}} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Die Werte des Cosinus der Winkel stimmen überein, demnach sind auch die Winkel gleich groß.

2.4 Als Erstes wird eine Hilfsebene H erstellt, die senkrecht zur Gerade g_1 liegt und durch den Koordinatenursprung verläuft. Der Normalenvektor der Ebene entspricht dabei dem Richtungsvektor der Gerade g_1:

$$H : \vec{n}_H \circ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = 0$$

$$H : \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$H : -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$H : 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$$

Dann wird der Schnittpunkt von H und der Geraden g_1 ermittelt. Dazu werden die einzelnen Komponenten der Geradengleichung von g_1 in die Gleichung der Ebene H eingesetzt:

$$\begin{aligned} & & 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 & & \\ &\Longleftrightarrow & 2(5+2\sigma) + 4(8+4\sigma) - 2(0-2\sigma) &= 0 & & \\ &\Longleftrightarrow & 10 + 4\sigma + 32 + 16\sigma + 4\sigma &= 0 & & \\ &\Longleftrightarrow & 24\sigma + 42 &= 0 & & \mid -42 \\ &\Longleftrightarrow & 24\sigma &= -42 & & \mid : 24 \\ &\Longleftrightarrow & \sigma &= -\frac{7}{4} & & \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung von g_1 ein, erhält man die Koordinaten des Punktes L, der den kürzesten Abstand zum Koordinatenursprung hat:

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{7}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Für den Abstand gilt dann:

$$d = |\overrightarrow{OL}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{62}{4}} = \frac{\sqrt{62}}{\sqrt{4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{62}}{2}}}$$

Aufgabe 2 - Original-Prüfung FOS12 MT 2018, Analytische Geometrie-Teil BII

1.0 Ein Hotel wurde in Form einer vierseitigen Pyramide mit gleich großen gläsernen Seitenflächen gebaut. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ stellen die Punkte $A(2|1|3)$, $B(2|31|3)$, $C(-28|31|3)$ und $D(-28|1|3)$ die Eckpunkte der Grundfläche und der Punkt $S(-13|16|30)$ die Spitze der Pyramide dar.
In der Nähe des Hotels befindet sich ein Kanal, dessen Uferlinie in einem bestimmten Bereich geradlinig verläuft und modellhaft duch die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 27 \\ -24 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$ beschrieben werden kann.
Alle Koordinaten sind in der Einheit Meter angegeben. Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

1.1 Zeigen Sie, dass die Grundfläche ABCD des Hotels quadratisch ist. **4 BE**

1.2 Die Kante $\overline{AB}$ des Hotels liegt auf der Geraden s. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden s auf und zeigen Sie, dass s echt parallel zur Geraden g verläuft. **4 BE**

1.3 Die Grundfläche ABCD der Pyramide und die Gerade g liegen in der Ebene E.
Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Ebene E in Parameter- sowie in Koordinatenform und beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E im Koordinatensystem.
[Mögliches Teilergebnis: $E: -x_3 + 3 = 0$] **4 BE**

1.4 Eine Reinigungsfirma wird mit der fachgerechten Reinigung der gläsernen Seitenflächen des Hotels beauftragt. Berechnen Sie die Mantelfläche der Pyramide und ermitteln Sie die Kosten der Reinigung auf Euro gerundet, wenn für 1 m^2 gereinigte Fläche 5 Euro veranschlagt werden. **4 BE**

1.5 Ein Fassadenkletterer befindet sich auf der Kante $\overline{BS}$ der Pyramide. Berechnen Sie den Neigungswinkel der Kante $\overline{BS}$ zur Grundfläche ABCD. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen. **3 BE**

1.6 Für Werbezwecke soll von der Spitze S des Hotels auf kürzestem Weg zur nahen Uferlinie des Kanals eine Lichterkette gespannt werden.
Berechnen Sie die Mindestlänge der Lichterkette auf Meter gerundet. **5 BE**

1.7 Ein Kanal-Passagierschiff passiert nachts das Hotel. Vom Punkt $Q(27|-3|3)$ wird vom Schiff ein Lichtstrahl in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -30 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix}$ gesendet.
Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl die gläserne Seitenfläche ABS des Hotels trifft. **6 BE**

Lösungsvorschlag A2: Original-Prüfung FOS12 MT 2018, Analytische Geometrie-Teil BII

1.0 Die Eckpunkte einer Pyramide sind gegeben mit den Koordinaten $A(2|1|3)$, $(2|31|3)$, $C(-28|31|3)$ und $D(-28|1|3)$ der Grundfläche und die der Spitze mit $S(-13|16|30)$.

Zusätzlich wird ein Kanal beschrieben durch die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 27 \\ -24 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$.

1.1 Zunächst werden die Vektoren der Seiten der Grundfläche und deren Beträge bestimmt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DA}|$$

Die Seiten der Grundfläche sind alle gleich lang. Zusätzlich wird das Skalarprodukt zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ berechnet um eine Information über den eingeschlossenen Winkel zu erhalten:

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$$

Die Seitenkanten schließen einen rechten Winkel ein und alle Kanten sind gleich lang. Demnach muss es sich um ein Quadrat handeln.

1.2 **Gleichung der Geraden s**

Aus den berechneten Vektoren der vorherigen Teilaufgabe kann direkt die Gleichung der Gerade aufgestellt werden:

$$s: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

Gegenseitige Lage von s und g

Um zu prüfen ob die beiden Geraden parallel sind, muss geprüft werden, ob die Richtungsvektoren beider Geraden Vielfache voneinander sind:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da nur die x_2-Komponente beider Vektoren ungleich null ist, kann direkt abgelesen werden, dass $t = 30$ und die Richtungsvektoren somit Vielfache voneinander sind. Beide Geraden verlaufen demnach parallel. Um zu prüfen ob die Geraden echt parallel verlaufen, wird eine Punktprobe gemacht, indem man den Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ gleich der Geradengleichung von g setzt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -24 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In der ersten Zeile steht nun jedoch $2 = 27$, was ein offensichtlicher Widerspruch ist, sodass die Punktprobe nicht erfüllt ist. Demnach verlaufen die beiden Geraden echt parallel.

1.3 **Gleichung der Ebene in Parameterform**

Eine Gleichung der Ebene in Parameterform kann direkt aus den Koordinaten der Eckpunkt aufgestellt werden:

$$E : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \mu \cdot \overrightarrow{AB} + \nu \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad \text{mit } \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

Gleichung der Ebene in Koordinatenform

Aus den Spannvektoren der Ebene wird der Normalenvektor der Ebene berechnet:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -30 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \cdot 0 - 0 \cdot 30 \\ 0 \cdot (-30) - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 30 - 30 \cdot (-30) \end{pmatrix} = 300 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit diesem Normalenvektor und den Koordinaten des Punktes A kann die Gleichung der Ebene in Koordinatenform gefunden werden:

$$\begin{aligned} E : \vec{n}_E \circ \left[\vec{x} - \overrightarrow{OA}\right] &= 0 \\ E : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 3 \end{pmatrix} &= 0 \\ \underline{\underline{E : x_3 - 3 = 0}} \end{aligned}$$

Anhand der Ebenengleichung in Koordinatenform kann man erkennen, dass diese echt parallel zur x_1x_2-Ebene liegt, da $x_1 = x_2 = 0$ und $d = -3 \neq 0$.

1.4 Die Fläche einer Seite entspricht der Hälfte der Fläche des Parallelogramms, das $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS}$ aufspannen. Demnach entspricht die gesamte Fläche dem vierfachen dieses Wertes (da die Grundfläche ABCD quadratisch ist). Somit gilt:

$$\begin{aligned} A &= 4 \cdot A_{\triangle ABS} = 4 \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS}| \\ &= 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 27 \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} 30 \cdot 27 - 0 \cdot 15 \\ 0 \cdot (-15) - 0 \cdot 27 \\ 0 \cdot 15 - 30 \cdot (-15) \end{pmatrix} \right| = 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} 810 \\ 0 \\ 450 \end{pmatrix} \right| \\ &= 2 \cdot \sqrt{810^2 + 0^2 + 450^2} = 2 \cdot \sqrt{90^2 \cdot 9^2 + 90^2 \cdot 5^2} = 2 \cdot 90 \cdot \sqrt{9^2 + 5^2} = \underline{\underline{180 \cdot \sqrt{106}}}\,[\text{m}^2] \end{aligned}$$

Die dabei anfallenden Kosten berechnen sich wie folgt:

$$K = 5 \, \frac{€}{\text{m}^2} \cdot 180 \cdot \sqrt{106} \, \text{m}^2 \approx \underline{\underline{9266}}\,[€]$$

1.5 Zunächst wird der Winkel β zwischen $\overrightarrow{BS}$ und dem Normalenvektor $\vec{n}_E$ der Ebene E berechnet. Der gesuchte Winkel α zwischen $\overrightarrow{BS}$ und der Grundfläche ABCD entspricht dann $\alpha = 90° - \beta$:

$$\cos(\beta) = \frac{|\overrightarrow{BS} \circ \vec{n}_E|}{|\overrightarrow{BS}| \cdot |\vec{n}_E|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-15\\-15\\27\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-15\\-15\\27\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{27}{\sqrt{15^2+15^2+27^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{27}{\sqrt{1179}}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \arccos\left(\frac{27}{\sqrt{1179}}\right) \approx 38{,}16°$$

Der gesuchte Winkel ist somit $\alpha = 90° - \beta = 90° - 38{,}16° = \underline{\underline{51{,}84°}}$.

1.6 Es wird die Gleichung einer Hilfsebene aufgestellt, die Senkrecht zur Geraden g - also senkrecht zum Kanal - steht und den Punkt S enthält. Dafür wird als Normalenvektor der Ebene $\vec{n}_H$ der Richtungsvektor der Gerade g verwendet:

$$\begin{aligned} H: \vec{n}_H \circ \left[\vec{x} - \overrightarrow{OS}\right] &= 0 \\ H: \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-13\\16\\30\end{pmatrix}\right] &= 0 \\ H: \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}x_1+13\\x_2-16\\x_3-30\end{pmatrix} &= 0 \\ H: x_2 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Der Punkt des Kanals mit kürzestem Abstand zur Spitze entspricht nun dem Schnittpunkt der Gerade g mit der Ebene H. Um diesen zu finden, werden die Komponenten der Geradengleichung in die Ebenengleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} && x_2 - 16 &= 0 \\ \Longleftrightarrow && -24 + k - 16 &= 0 \qquad | +40 \\ \Longleftrightarrow && k &= 40 \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert in die Geradengleichung ein, erhält man die Koordinaten des Punktes L mit kürzestem Abstand zur Spitze:

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}27\\-24\\3\end{pmatrix} + 40 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}27\\16\\3\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad L\,(27\,|\,16\,|\,3)$$

Nun kann der Abstand d beider Punkte berechnet werden:

$$d = |\overrightarrow{LS}| = \left|\begin{pmatrix}-40\\0\\27\end{pmatrix}\right| = \sqrt{40^2+0^2+27^2} = \sqrt{2329} \approx 48$$

Die Mindestlänge der Lichterkette beträgt also $\underline{48}$ [m].

1.7 Zunächst wird die Gleichung der Ebene E_{ABS} gesucht, in der die Seitenfläche ABS liegt:

$$E_{ABS}: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \tau \cdot \overrightarrow{AB} + \omega \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 27 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \tau, \omega \in \mathbb{R}$$

Die Gerade h des Lichtstrahls ergibt sich aus der Position Q des Schiffes und der Richtung $\vec{v}$ des Lichtstrahls:

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{OQ} + \sigma \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 27 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \sigma \in \mathbb{R}$$

Der Schnittpunkt zwischen Gerade h und Ebene E_{ABS} entspricht nun dem Punkt, wo der Lichtstrahl auf die Ebene trifft. Um diesen zu bestimmen, werden die beiden Gleichungen gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 15 \\ 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 19 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Zeilenweise ergeben sich so drei Gleichungen die zunächst umgeformt werden:

$$\begin{array}{rrl} \text{(I)} & 2 + 0 \cdot \tau - 15 \cdot \omega = 27 - 30\sigma & \\ \Longleftrightarrow & 2 - 15\omega = 27 - 30\sigma & \mid +30\sigma - 2 \\ \Longleftrightarrow & -15\omega + 30\sigma = 25 & \\ \text{(II)} & 1 + 30 \cdot \tau + 15 \cdot \omega = -3 + 19 \cdot \sigma & \mid -19\sigma - 1 \\ \Longleftrightarrow & 30\tau + 15\omega - 19\sigma = -4 & \\ \text{(III)} & 3 + 0 \cdot \tau + 27 \cdot \omega = 3 + 9 \cdot \sigma & \mid -3 - 9\sigma \\ \Longleftrightarrow & 27\omega - 9\sigma = 0 & \end{array}$$

Da Gleichung (I) und (III) kein τ enthält, können diese zunächst gesondert betrachtet werden:

$$\begin{array}{rrl} \text{(III)} & 27\omega - 9\sigma = 0 & \mid \cdot \frac{10}{3} \\ \Longleftrightarrow & 90\omega - 30\sigma = 0 & \\ \text{(I)} + \text{(III)} & -15\omega + 30\sigma + 90\omega - 30\sigma = 25 & \\ \Longleftrightarrow & 75\omega = 25 & \mid : 75 \\ \Longleftrightarrow & \underline{\omega = \frac{1}{3}} & \\ \text{Einsetzen in (III)} & 27 \cdot \frac{1}{3} - 9\sigma = 0 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad && 9 - 9\sigma &= 0 && \mid -9 \\ \Longleftrightarrow \quad && -9\sigma &= -9 && \mid : (-9) \\ \Longleftrightarrow \quad && \underline{\sigma = 1} \end{aligned}$$

Beide Werte können nun in Gleichung 2 eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \text{(II)} \quad && 30\tau + 15 \cdot \frac{1}{3} - 19 \cdot 1 &= -4 \\ \Longleftrightarrow \quad && 30\tau - 14 &= -4 && \mid +14 \\ \Longleftrightarrow \quad && 30\tau &= 10 && \mid : 30 \\ \Longleftrightarrow \quad && \underline{\tau = \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Gemäß der Gleichung der Ebene E_{ABS} entspricht τ den Verlauf von Punkt A Richtung B und ω dem Verlauf von Punkt A Richtung S. Für den Auftreffpunkt des Lichtstrahls ist $\omega > 0$ und $\tau > 0$ erfüllt. Zudem ist außerdem $\tau + \omega = \frac{2}{3} < 1$ erfüllt. Somit muss der Auftreffpunkt innerhalb des Dreiecks ABS und somit auf der gläsernen Seitenfläche ABS liegen.

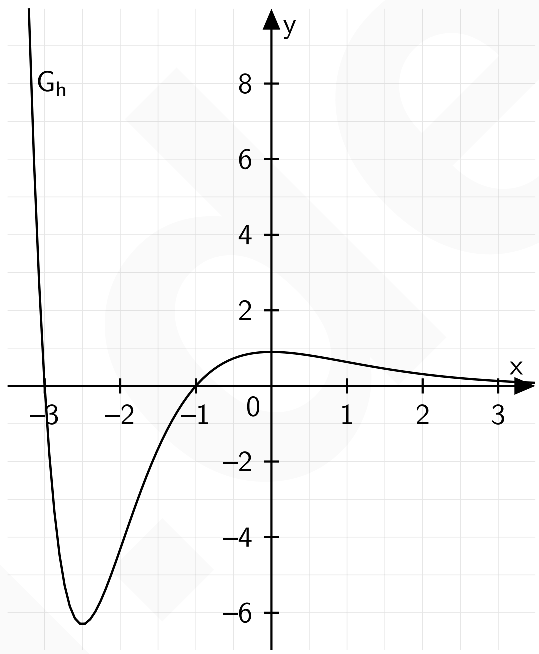
Musterprüfung nach LehrplanPLUS

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k\colon x \longmapsto -\frac{1}{3}x(x-k)(x+3)$ mit $D_{f_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl, Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_k. **3 BE**

1.2 Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P(-2\,|\,2)$ auf dem Graphen der Funktion f_k liegt. **2 BE**

2.0 Die Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion $h(x)$ mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}$.



2.1 Fügen Sie der gegebenen Abbildung eine Skizze des Graphs der ersten Ableitung $h'(x)$ im dargestellten Intervall hinzu. Achten Sie dabei besonders auf die Abszisse charakteristischer Punkte, wie beispielsweise Nullstellen. **3 BE**

2.2 Geben Sie außerdem die Bedeutung des Ausdrucks

$$\int_{-3}^{-1} h(x)dx$$

an und stellen Sie dies in der gegebenen Abbildung geeignet dar. **2 BE**

3.0 Gegeben ist die Funktion $g\colon x \longmapsto \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 3) \cdot e^{2x}$ mit Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$.

3.1 Prüfen Sie die Funktion auf Nullstellen. **2 BE**

3.2 Ermitteln Sie die erste Ableitung der Funktion und geben Sie damit ohne weitere Rechnung das Monotonieverhalten des Graphen von g an. **4 BE**

3.3 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$. Geben Sie die Wertemenge der Funktion g an. **3 BE**

1.1 Die Nullstellen von f_k ermittelt man durch Nullsetzen der einzelnen Faktoren, denn der ganze Term wird null, wenn ein Faktor null ist.

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{3}x(x-k)(x+3) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & -\frac{1}{3}x = 0 \quad \text{oder} \quad (x-k) = 0 \quad \text{oder} \quad (x+3) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = k \quad \text{oder} \quad x_3 = -3
\end{aligned}
$$

Um die Vielfachheit der Nullstellen zu bestimmen, muss für $k \in \mathbb{R}$ eine Fallunterscheidung gemacht werden:
1. Überlegung: Für welche Werte von k fallen die Nullstellen zusammen?

1.Fall $k = 0$, da $x_2 = x_1$: 2 Nullstellen: eine doppelte Nullstelle bei $\underline{\underline{x_{1,2} = 0}}$ und eine einfache Nullstelle bei $\underline{\underline{x_3 = -3}}$

2.Fall $k = -3$, da $x_2 = x_3$: 2 Nullstellen: eine einfache Nullstelle bei $\underline{\underline{x_1 = 0}}$ und eine doppelte Nullstelle bei $\underline{\underline{x_{2;3} = -3}}$

2. Überlegung: Für welche Werte von k fallen die Nullstellen nicht zusammen?

3.Fall $k \in \mathbb{R}\backslash\{0; -3\}$: 3 Nullstellen: drei einfache Nullstellen bei $\underline{\underline{x_1 = 0}}$, $\underline{\underline{x_2 = k}}$ und $\underline{\underline{x_3 = -3}}$.

1.2 Um den entsprechenden Wert für k zu ermitteln, setzt man die Koordinaten des Punktes $P(-2\,|\,2)$ in die Funktionsschar f_k ein.

$$
\begin{aligned}
& f_k(-2) = 2 && \text{(Ansatz)} \\
\Longleftrightarrow \quad & -\frac{1}{3} \cdot (-2)(-2-k)(-2+3) = 2 && \text{(Ausmultiplizieren)} \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{2}{3}(-2-k) \cdot 1 = 2 && \left|\cdot \frac{3}{2}\right. \\
\Longleftrightarrow \quad & -2-k = \frac{2 \cdot 3}{2} && |+2 \\
\Longleftrightarrow \quad & -k = 3+2 && |\cdot(-1) \\
\Longleftrightarrow \quad & k = -5
\end{aligned}
$$

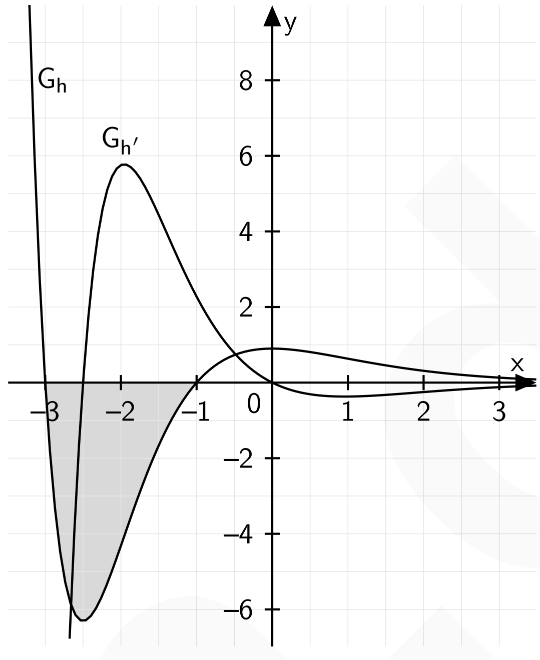
Für $\underline{\underline{k = -5}}$, verläuft die Funktion f_k durch den Punkt $(-2\,|\,2)$.

2.1 Für die Darstellung der ersten Ableitung müssen folgende Informationen berücksichtigt werden, die aus der Zeichnung abgelesen werden:

- Tiefpunkt des Graphen G_h bei $x \approx -2{,}5$ $\Rightarrow$ Nullstelle von $h'(x)$
- Hochpunkt des Graphen G_h bei $x \approx 0$ $\Rightarrow$ Nullstelle von $h'(x)$

- Graph von G_h fallend für $x \leq 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad h'(x) \leq 0$ für $x \leq 2{,}5$
- Graph von G_h steigend für $-2{,}5 \leq x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad h'(x) \geq 0$ für $-2{,}5 \leq x \leq 0$
- Graph von G_h fallend für $x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad h'(x) \leq 0$ für $x \geq 0$

Weiterhin wird beachtet, dass der Funktionswert der ersten Ableitung umso größer (bzw. kleiner) ist, je steiler der Graph von h steigt (bzw. fällt).



2.2 Bei dem gegebenen Ausdruck handelt es sich um ein Integral, dessen Betrag der Maßzahl des Flächenstückes entspricht, das der Graph von $h(x)$ mit der x-Achse zwischen $x = -3$ und $x = -1$ einschließt.
Markierung des Flächenstücks in Teilaufgabe 2.1.

3.1 **Nullstellen**
Da die Exponentialfunktion nie null wird, gilt für eventuelle Nullstellen:

$$g(x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \qquad 2x^2 - 2x + 3 = 0$$

Es kann nun die Diskriminante des quadratischen Terms berechnet werden:

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = -20$$

Da die Diskriminante negativ ist, besitzt die Funktion $g(x)$ keine Nullstellen.

3.2 **Ermitteln der ersten Ableitung**
Mithilfe von Produkt- und Kettenregel wird die erste Ableitung der Funktion berechnet:

$$g(x) = \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 3) \cdot e^{2x}$$

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{4}\cdot\left[(2x^2-2x+3)'\cdot e^{2x}+(2x^2-2x+3)\cdot(e^{2x})'\right] && \text{(Ansatz)}\\
&= \frac{1}{4}\left((2\cdot 2x-2)\cdot e^{2x}+(2x^2-2x+3)\cdot e^{2x}\cdot 2\right) && \text{(Anwendung)}\\
&= \frac{1}{4}\left((4x-2)\cdot e^{2x}+(4x^2-4x+6)\cdot e^{2x}\right) && (e^{2x}\text{ ausklammern})\\
&= \frac{1}{4}e^{2x}\cdot(4x^2+4x-4x+4) && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= (x^2+1)\cdot e^{2x}
\end{aligned}
$$

Monotonieverhalten des Graphen ohne weitere Rechnung

Da ohne weitere Rechnung auf das Monotonieverhalten geschlossen werden soll, werden die einzelnen Terme der ersten Ableitung betrachtet. Der Term (x^2+1) beschreibt eine nach oben geöffnete, nach oben verschobene Normalparabel, die nur positive Funktionswerte annimmt. Der Exponentialterm e^{2x} ist ebenfalls stets positiv. Somit nimmt die erste Ableitung nur positive Werte an und der Graph der Funktion g ist auf dem gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend.

3.3 **Verhalten der Funktionswerte für x $\to \pm\infty$**

Für die Berechnung der Grenzwerte muss berücksichtigt werden, dass die Exponentialfunktion im Grenzwert stets dominiert.

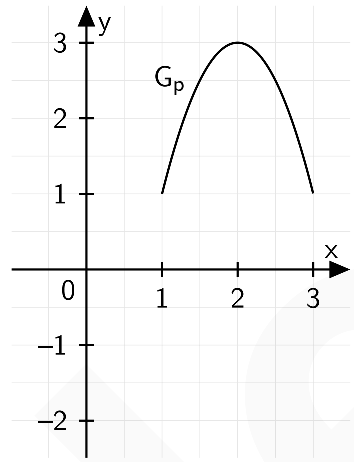
$$x\to-\infty:\ g(x)=\frac{1}{4}\underbrace{(2x^2-2x+3)}_{\to\infty}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{\to 0}\to 0 \qquad \text{(da e-Fkt dominiert)}$$

$$x\to\infty:\ g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4}\underbrace{(2x^2-2x+3)}_{\to\infty}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{\to\infty}\to\infty$$

Wertemenge

Da die Funktion für $x\to-\infty$ gegen null und für $x\to\infty$ gegen $+\infty$ strebt, und G_g auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend ist, ergibt sich der Wertebereich zu $\underline{\underline{W_g =]0;\infty[}}$.

1.0 Nebenstehende Grafik zeigt einen Ausschnitt des Graphen der quadratischen Funktion $p(x) = -2 \cdot (x-2)^2 + 3$ mit der Definitionsmenge $D_p = \mathbb{R}$. Gegeben ist zusätzlich die lineare Funktion $k(x) = x - 2$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$.



1.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionen. **3 BE**

1.2 Bestimmen Sie rechnerisch den exakten Wert der Abszisse, an welcher die beiden Graphen denselben Anstieg haben. **3 BE**

1.3 Der Graph der quadratischen Funktion, der Graph der linearen Funktion, die x-Achse und die Gerade $x = 1$ schließen im I. Quadranten ein Flächenstück ein. Zeichnen Sie den Graph von k und die Gerade $x = 1$ in die gegebenen Abbildung ein und markieren Sie das Flächenstück. Berechnen Sie sodann die Maßzahl des Flächeninhaltes. **4 BE**

2.0 Betrachtet werden die Funktionen $f_a(x) = (ax^2+2x-1) \cdot e^{ax}$ mit der Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

2.1 Betrachten Sie den Fall $a = 0$. Was ergibt sich für die Funktion? **2 BE**

2.2 Im Folgenden soll nun $a \neq 0$ gelten.

Finden Sie jeweils alle Werte für a, die die folgenden Aussagen erfüllen.

a)Es gilt $x \to \infty$: $f_a(x) \to 0$.

b)Die Funktion $f_a(x)$ besitzt genau eine Nullstelle.

c)Die Funktion $f_a(x)$ besitzt mehrere Nullstellen.

d)Die Funktion verläuft durch den Punkt $(0\,|\,-1)$.

4 BE

2.3 Für diese Teilaufgabe soll $a = 2$ gelten.
Zeigen Sie, dass $F(x) = (x^2 - \frac{1}{2}) \cdot e^{2x}$ eine Stammfunktion von $f_2(x)$ ist und berechnen Sie damit den exakten Wert des folgenden Integrals:

$$\int_0^4 f_2(x)dx$$

4 BE

1.1 Koordinaten der Schnittpunkte

Es werden die Schnittpunkte der beiden Funktionen gesucht. Dafür werden die Funktionsterme gleichgesetzt.

$$
\begin{aligned}
 & & p(x) &= k(x) \\
\Longleftrightarrow & & -2(x-2)^2+3 &= x-2 \\
\Longleftrightarrow & & -2(x^2-4x+4)+3 &= x-2 \\
\Longleftrightarrow & & -2x^2+8x-5 &= x-2 \qquad\qquad |-(x-2) \\
\Longleftrightarrow & & -2x^2+7x-3 &= 0 \\
\Longleftrightarrow & & x_{1;2} &= \frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot(-2)\cdot(-3)}}{2\cdot(-2)} \\
\Longleftrightarrow & & x_{1;2} &= \frac{-7\pm\sqrt{25}}{-4} \\
\Longleftrightarrow & & x_{1;2} &= \frac{-7\pm 5}{-4} \\
\Longleftrightarrow & & x_1 &= \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad x_2 = 3
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in eine der Funktionsgleichungen ergeben sich die Funktionswerte an diesen Stellen. Zur leichteren Berechnung wird in die lineare Funktion eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
k\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}-2 = -\frac{3}{2} \\
k(3) &= 3-2 = 1
\end{aligned}
$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte lauten $\underline{\underline{\left(\frac{1}{2}\middle|-\frac{3}{2}\right)}}$ und $\underline{\underline{(3\,|\,1)}}$.

1.2 Ermitteln der ersten Ableitungen

Zunächst wird die erste Ableitung der Funktionen bestimmt:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= -2(x-2)^2+3 = -2(x^2-4x+4)+3 = -2x^2+8x-5 \\
p'(x) &= -2\cdot 2x+8 = -4x+8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k(x) &= x-2 \\
k'(x) &= 1
\end{aligned}
$$

Wert der Abszisse mit übereinstimmender Steigung

Um den Wert der Abszisse zu bestimmen, an dem die beiden Funktionsgraphen dieselbe Steigung aufweisen, werden die Terme der ersten Ableitung gleichgesetzt:

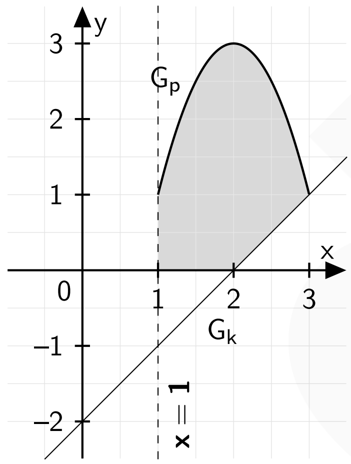
$$
\begin{aligned}
 & & p'(x) &= k'(x) \\
\Longleftrightarrow & & -4x+8 &= 1 \qquad\qquad |-8
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow \qquad -4x = -7 \qquad |:(-4)$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \underline{\underline{x = \frac{7}{4}}}$$

1.3 **Grafische Darstellung**

Der Graph der linearen Funktion kann anhand der bisher bereits berechneten Punkte eingezeichnet werden:



Maßzahl der Fläche

Die Fläche entspricht der Fläche unterhalb des Graphen der Parabel im Intervall [1; 3] abzüglich des Dreiecks zwischen Graph der linearen Funktion und x-Achse im Intervall [2; 3]. Somit gilt für die Maßzahl A der Fläche:

$$A = \int_1^3 p(x)dx - A_\Delta = \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 5)dx - A_\Delta = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 5x\right]_1^3 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - \left(-\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1\right) - \frac{1}{2}$$

$$= -18 + 36 - 15 + \frac{2}{3} - 4 + 5 - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{25}{6}}}\,[FE]$$

2.1 **Spezialfall a = 0**

Es wird $a = 0$ in den Funktionsterm eingesetzt:

$$f_0(x) = (0 \cdot x^2 + 2x - 1) \cdot e^{0 \cdot x} = 2x - 1$$

Da für $a = 0$ der quadratische Anteil verschwindet und der Exponentialterm den konstanten Wert von 1 annimmt, liegt hier eine lineare Funktion vor.

2.2 Es werden jeweils die Werte für a gesucht, die die geforderten Bedingungen erfüllen:

a) Da für $x \to \infty$ im Grenzwert der Exponentialterm dominiert, werden dafür zwei relevante Fälle unterschieden:

Fall 1: $a > 0$:
Für $a > 0$ gilt $x \to \infty$: $e^{ax} \to \infty$. Da die Exponentialfunktion im Grenzwert dominiert, gilt auch $x \to \infty$: $f_a(x) \to \infty$.

Fall 2: $a < 0$:
Für $a < 0$ gilt $x \to \infty$: $e^{ax} \to 0$. Da die Exponentialfunktion im Grenzwert dominiert, gilt auch $x \to \infty$: $f_a(x) = 0$. Die Bedingung wird also erfüllt durch alle $\underline{\underline{a < 0}}$.

b) Da die Exponentialfunktion niemals null wird, gilt für die Nullstellen im allgemeinen:

$$f_a(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad ax^2 + 2x - 1 = 0$$

Wenn nur genau eine Nullstelle vorliegen soll, so muss die Diskriminante D der quadratischen Funktion gleich null sein:

$$\begin{aligned} && D &= 0 \\ \Longleftrightarrow && 2^2 - 4 \cdot a \cdot (-1) &= 0 \\ \Longleftrightarrow && 4 + 4a &= 0 && \mid -4 \\ \Longleftrightarrow && 4a &= -4 && \mid :4 \\ \Longleftrightarrow && a &= -1 \end{aligned}$$

Für $\underline{\underline{a = -1}}$ besitzt die Funktion genau eine Nullstelle.

c) Analog zur Betrachtung aus b) muss die Diskriminante des quadratischen Terms nun größer als null sein, damit zwei Nullstellen vorliegen:

$$\begin{aligned} && D &> 0 \\ \Longleftrightarrow && 4 + 4a &> 0 && \mid -4 \\ \Longleftrightarrow && 4a &> -4 && \mid :4 \\ \Longleftrightarrow && a &> -1 \end{aligned}$$

Für $\underline{\underline{a > -1}}$ besitzt die Funktion mehrere Nullstellen.

d) Es muss $f_a(0) = -1$ gelten:

$$\begin{aligned} && f_a(0) &= -1 \\ \Longleftrightarrow && (a \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 - 1) \cdot e^{a \cdot 0} &= -1 \\ \Longleftrightarrow && -1 &= -1 \end{aligned}$$

Die Aussage ist also unabhängig von a und damit für alle $\underline{\underline{a \neq 0}}$ erfüllt.

2.3 **Nachweis der Stammfunktion**
Es muss gezeigt werden, dass $F'(x) = f_2(x)$ gilt, indem mithilfe von Ketten- und Produktregel die erste Ableitung der Funktion berechnet wird:

$$F(x) = (x^2 - \frac{1}{2}) \cdot e^{2x}$$

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \left[(x^2 - \tfrac{1}{2})' \cdot e^{2x} + (x^2 - \tfrac{1}{2}) \cdot (e^{2x})'\right] && \text{(Ansatz)}\\
&= (2x) \cdot e^{2x} + (x^2 - \tfrac{1}{2}) \cdot e^{2x} \cdot 2 && \text{(Anwendung)}\\
&= 2x \cdot e^{2x} + (2x^2 - 1) \cdot e^{2x} && \text{((}e^{2x}\text{) ausklammern)}\\
&= (2x^2 + 2x - 1) \cdot e^{2x}\\
&= f_2(x)
\end{aligned}
$$

Es gilt also $F'(x) = f_2(x)$, somit ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f_2(x)$.

Wert des Integrals

Der exakte Wert des Integrals wird mithilfe der Stammfunktion $F(x)$ berechnet:

$$
\int_0^4 f_2(x)dx = [F(x)]_0^4 = (4^2 - \frac{1}{2}) \cdot e^{2\cdot 4} - (0^2 - \frac{1}{2}) \cdot e^{2\cdot 0} = (16 - \frac{1}{2}) \cdot e^8 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{31}{2} \cdot e^8 + \frac{1}{2}}}
$$

1.0 Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$ und die Ebenen $E: x_3 - 2 = 0$ und $F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $p,q \in \mathbb{R}$.

1.1 Geben Sie die besondere Lage der Geraden g und h, sowie der Ebene E im Koordinatensystem an. **3 BE**

1.2 Schließen Sie anhand der Ergebnisse der vorherigen Teilaufgabe auf die gegenseitige Lage der Geraden g mit der Ebene E und der Geraden h mit der Ebene E. **2 BE**

1.3 Die beiden Ebenen E und F schneiden sich in einer Schnittgeraden s. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Geraden. **3 BE**

2 Im $\mathbb{R}^3$ sind die Koordinaten zweier Punkte P und Q gegeben zu $P(2|4|2)$ und $Q(1|-2|3)$. Ermitteln Sie, welche der beiden Punkte einen größeren Abstand zum Koordinatenursprung hat und bestimmen sie die Größe des Winkels $\sphericalangle POQ$, der zwischen $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ eingeschlossen wird. **4 BE**

1.1 Da **nur** die x_1-Komponente des Richtungsvektors der Geraden g nicht null ist, verläuft die Gerade g parallel zur x_1-Achse. Da mit dem Ortsvektor zudem eine Verschiebung um 1 in x_3-Richtung vorliegt, verläuft die Gerade g **echt** parallel zur x_1-Achse.

Bei der Geraden h liegt keine Verschiebung in Form eines Ortsvektors vor, beim Richtungsvektor ist **nur** die x_3-Komponente von null verschieden. Somit verläuft die Gerade h identisch zur x_3-Achse.

Die Gleichung der Ebene lässt sich umformen zu $x_3 = 2$. Die Ebene liegt also echt parallel zur x_1x_2-Ebene.

1.2 **Gegenseitige Lage von g und E**
Da g parallel zur x_1-Achse und E parallel zur x_1x_2-Ebene liegt, ist auch g parallel zu E. Außerdem ist die Gerade g um 1 Einheit in Richtung x_3 verschoben, während für die Ebene $x_3 = 2$ gilt. Somit verläuft g echt parallel zu E.

Gegenseitige Lage von h und E
Da E parallel zur x_1x_2-Ebene liegt und h identisch mit der x_3-Achse verläuft, verläuft h senkrecht zu E.

1.3 Die Koordinaten des Schnittpunktes erhält man, indem man die Koordinaten der Ebene F komponentenweise in die Gleichung von E einsetzt:

$$\begin{aligned} & & x_3 - 2 &= 0 & \\ &\Longleftrightarrow & 2 + p \cdot 1 + q \cdot (-1) - 2 &= 0 & \\ &\Longleftrightarrow & 2 + p - q - 2 &= 0 & \quad | + q \\ &\Longleftrightarrow & p &= q & \end{aligned}$$

Setzt man $\sigma = p = q$ in die Gleichung der Ebene F ein, erhält man die Gleichung der Schnittgeraden s:

$$s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad \text{mit } \sigma \in \mathbb{R}$$

2 **Abstand zum Koordinatenursprung**
Es werden die Beträge der Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ berechnet:

$$|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24} \qquad |\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

Da $\sqrt{14} < \sqrt{25}$, ist der Punkt P weiter vom Ursprung entfernt, als der Punkt Q.

Eingeschlossener Winkel
Um eine Aussage zur Größe des Winkels treffen zu können wird zunächst das Skalarprodukt

berechnet:

$$\overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 = 2 - 8 + 6 = 0$$

Da das Skalarprodukt den Wert null hat, stehen die beiden Vektoren senkrecht aufeinander. Der eingeschlossene Winkel hat demnach eine Größe von $\underline{\underline{90^\circ}}$.

1.0 Im $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $P\,(2\,|\,4\,|\,-1)$ und $Q_a\,(2a\,|\,1-a\,|\,3)$, mit $a \in \mathbb{R}$, sowie die Ebene $E\colon x_1 - 2x_2 + 6 = 0$ gegeben.

1.1 Die Punkte Q_a liegen alle auf der Geraden g. Geben Sie eine Gleichung dieser Geraden an. **2 BE**

1.2 Prüfen Sie, ob der Punkt P auf der Geraden g bzw. in der Ebene E liegt. **3 BE**

1.3 Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von g und E. **3 BE**

2.0 Gegeben sind die Geraden $h = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $k = \vec{c} + \mu \cdot \vec{d}$ mit $\mu \in \mathbb{R}$. Die Geraden besitzen einen gemeinsamen Schnittpunkt. Zudem verläuft Gerade h senkrecht zu Gerade k und durch den Punkt $R\,(-1\,|\,5\,|\,2)$, der nicht der Schnittpunkt der beiden Geraden ist.

2.1 Geben Sie jeweils mit kurzer Begründung an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Die Ortsvektoren der beiden Geraden müssen senkrecht aufeinander stehen.

b) Die Richtungsvektoren der beiden Geraden müssen senkrecht aufeinander stehen.

c) Die Gerade k verläuft durch den Punkt R.

5 BE

2.2 Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, wenn die Koordinaten des Schnittpunktes $S\,(1\,|\,3\,|\,2)$ lauten. **2 BE**

1.1 Da alle Punkte Q_a auf g liegen, gilt für die Gleichung der Geraden:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OQ_a} = \begin{pmatrix} 2a \\ 1-a \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

1.2 **Prüfen ob P auf g liegt**
Um zu prüfen, ob der Punkt P auf der Geraden g liegt, wird der Ortsvektor von P mit der Geradengleichung von g gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zeilenweise ergeben sich so drei Gleichungen. Für die erste Zeile gilt:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) & 2 &= 0 + a \cdot 2 & &| :2 \\ &\Longleftrightarrow & a &= 1 \end{aligned}$$

Setzt man dies in die zweite Zeile ein, so folgt:

$$4 = 1 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Widerspruch}$$

Somit ergibt sich keine Lösung für a und P liegt nicht auf g.

Prüfen ob P in E liegt
Hier werden die Koordinaten von P in die Gleichung der Ebene E eingesetzt:

$$\begin{aligned} & & x_1 - 2x_2 + 6 &= 0 \\ &\Longleftrightarrow & 2 - 2 \cdot 4 + 6 &= 0 \\ &\Longleftrightarrow & 0 &= 0 \end{aligned}$$

Das Einsetzen der Koordinaten führt zu einer wahren Aussage. Somit liegt der Punkt P in der Ebene E.

1.3 Um die Koordinaten des Schnittpunktes zu ermitteln, wird die Gleichung von g komponentenweise in die Gleichung von E eingesetzt:

$$\begin{aligned} & & x_1 - 2x_2 + 6 &= 0 \\ &\Longleftrightarrow & 2a - 2 \cdot (1-a) + 6 &= 0 \\ &\Longleftrightarrow & 2a - 2 + 2a + 6 &= 0 \\ &\Longleftrightarrow & 4a + 4 &= 0 & &|-4 \\ &\Longleftrightarrow & 4a &= -4 & &| :4 \\ &\Longleftrightarrow & a &= -1 \end{aligned}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichung der Geraden ein, ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunktes:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S(-2|2|3)}}$$

2.1 Für die gegebenen Aussagen gilt:

a) falsch - Die Ortsvektoren legen nur einen Punkt auf der Geraden, aber nicht deren Verlauf fest. Somit kann aus dem Verlauf der Geraden nicht auf die gegenseitige Lage der Ortsvektoren geschlossen werden.

b) richtig - Die Richtungsvektoren der beiden Geraden beschreiben den Verlauf dieser, sodass die Geraden nur dann senkrecht zueinander verlaufen, wenn auch die Richtungsvektoren senkrecht aufeinander stehen.

c) falsch - Die beiden Geraden schneiden sich in nur einem einzigen Punkt, dem Schnittpunkt. Da explizit angegeben ist, das h durch den Punkt R verläuft, dies aber nicht der Schnittpunkt ist, kann k nicht durch den Punkt P verlaufen.

2.2 Die Gerade h verläuft durch die Punkte $R(-1|5|2)$ und $S(1|3|2)$. Damit ergibt sich eine Gleichung der Geraden wie folgt:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OR} + \tau \cdot \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 3-5 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad \text{mit } \tau \in \mathbb{R}$$

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a: x \longmapsto -x^3 + \frac{a}{4}x^2 - 3x + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $D_{f_a} = \mathbb{R}$. Der Graph wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie die Anzahl der Stellen mit waagrechter Tangente in Abhängigkeit von a. **5 BE**

1.2 Berechnen Sie die Steigung der Wendetangente des Graphen G_{f_a}. **3 BE**

1.3 Bestimmen Sie jeweils alle Werte für a, so dass die folgenden Aussagen erfüllt sind.

a) Die Funktion besitzt eine Nullstelle bei $x = 0$.

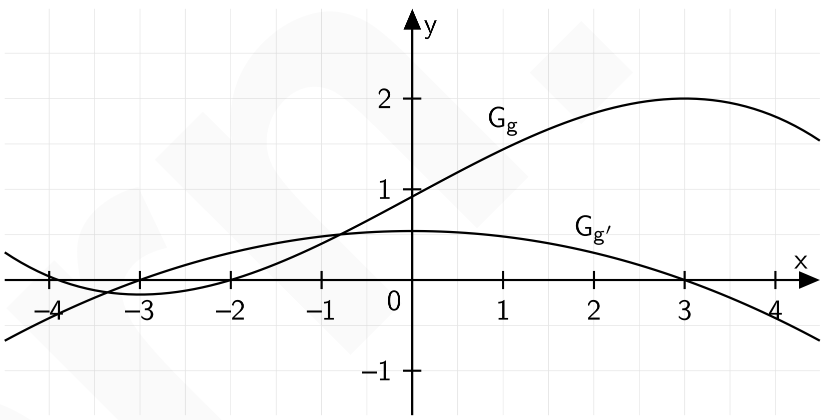
b) Bei $x = 2$ liegt ein Maximum der Funktion vor.

c) Das Integral $\int_0^{\sqrt{2}} f_a(x)dx$ nimmt den exakten Wert $-4 + \frac{7}{\sqrt{6}}$ an.

d) Bei $x = 1$ liegt ein Schnittpunkt der Graphen von erster und zweiter Ableitung von $f(x)$ vor.

Interpretieren Sie zudem das Ergebnis von d) im Sachzusammenhang. **8 BE**

2.0 Die gegebene Abbildung zeigt den Graphen G_g einer ganzrationalen Funktion $g(x)$ dritten Grades und den Graphen der Ableitungsfunktion $g'(x)$, deren Definitionsbereich jeweils $\mathbb{R}$ ist.



2.1 Ermitteln Sie anhand der gegebenen Abbildung einen Funktionsterm der Funktion $g(x)$.
[mögliches Ergebnis: $g(x) = \frac{1}{50}(-x^3 + 27x + 46)$] **5 BE**

2.2 Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten von G_g. **3 BE**

2.3 Ermitteln Sie den Term der zweiten Ableitung und zeichnen Sie deren Graphen in die Abbildung aus 2.0 ein. **2 BE**

2.4 Die x-Achse und der Graph der ersten Ableitung von g schließen ein Flächenstück ein. Markieren Sie dieses in der Abbildung und berechnen Sie die exakte Maßzahl der Fläche. **2 BE**

3.0 Ein Imbiss bietet verschiedene Speisen zum Mittagessen an. Die Öffnungszeiten des Imbisses sind 9 Uhr bis 15 Uhr. Der Betreiber hat die Besucherzahlen dokumentiert, damit er besser Ressourcen und Arbeitskräfte planen kann. Eine geeignete Modellfunktion, die die Besucherzahl beschreibt ist $b(t) = 20(t+4) \cdot e^{-(t-12)^2}$. Dabei ist $b(t)$ die Anzahl der Besucher und t die Zeit in Stunden nach 0 Uhr.
Auf das Mitführen von Einheiten kann verzichtet werden.

3.1 Geben Sie mit Begründung eine Definitionsmenge an und begründen Sie im Sachzusammenhang, auf welche Genauigkeit die Funktionswerte zu runden sind. **2 BE**

Im Folgenden ist der Funktionswert auf ganze Zahlen und die Zeit auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

3.2 Überprüfen Sie, ob im Rahmen der Rundungsgenauigkeit direkt zum Zeitpunkt der Eröffnung bereits mit einem Besucher zu rechnen ist. **2 BE**

3.3 Ermitteln Sie, zu welchem Zeitpunkt mit der maximalen Zahl an Besuchern zu rechnen ist und geben Sie diese Zahl an. **6 BE**

3.4 Stellen Sie die Kurve in einem geeigneten Koordinatensystem grafisch dar. **3 BE**

1.1 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Zunächst wird der Term der ersten Ableitung ermittelt:

$$f_a(x) = -x^3 + \frac{a}{4}x^2 - 3x + a$$
$$f'_a(x) = -3x^2 + 2 \cdot \frac{a}{4}x - 3 = -3x^2 + \frac{a}{2}x - 3$$

Anzahl der Stellen mit waagrechter Tangente

Die Stellen mit waagrechter Tangente entsprechen den Nullstellen der ersten Ableitung. Da es sich dabei um einen quadratischen Term handelt, wird die Diskriminante betrachtet:

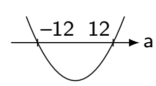
$$D = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-3) = \frac{a^2}{4} - 36$$

Möglichkeit 1: Vorzeichentabelle

Es wird untersucht, für welche Wert von a die Bedingung $D = 0$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned} && D &= 0 & \\ \Longleftrightarrow && \frac{a^2}{4} - 36 &= 0 & \mid +36 \\ \Longleftrightarrow && \frac{a^2}{4} &= 36 & \mid \cdot 4 \\ \Longleftrightarrow && a^2 &= 144 & \mid \sqrt{\ } \\ \Longleftrightarrow && a_{1;2} &= \pm 12 & \end{aligned}$$

Nun kann in Abhängigkeit von a eine Vorzeichentabelle der Diskriminante erstellt werden:

a	$a < -12$	$a = -12$	$-12 < a < 12$	$a = 12$	$12 < a$	Skizzen
Diskriminante: D	$+$	0	$-$	0	$+$	

Wenn die Determinante einen positiven Wert annimmt, also für $a \in]-\infty; -12[\cup]12; \infty[$, besitzt die erste Ableitung zwei Nullstellen und G_{f_a} besitzt zwei Stellen mit waagrechter Tangente.

Ist die Determinante gleich null, also für $a = \pm 12$, besitzt die erste Ableitung genau eine Nullstelle und G_{f_a} besitzt eine Stelle mit waagrechter Tangente.

Für $a \in]-12; 12[$ nimmt die Determinante negative Werte an, die erste Ableitung besitzt keine Nullstelle und G_{f_a} somit keine Stelle mit waagrechter Tangente.

Möglichkeit 2: Fallunterscheidung

Es werden nun drei Fälle unterschieden, je nachdem wieviele Nullstellen die erste Ableitung hat:

Fall 1: zwei Nullstellen:

Damit die erste Ableitung zwei Nullstellen hat, muss $D > 0$ gelten:

$$D > 0$$

$$
\begin{aligned}
\iff \quad & \frac{a^2}{4} - 36 > 0 && |+36 \\
\iff \quad & \frac{a^2}{4} > 36 && |\cdot 4 \\
\iff \quad & a^2 > 144 && |\sqrt{\ } \\
\iff \quad & |a| > 12
\end{aligned}
$$

Für $a \in]-\infty; -12[\cup]12; \infty[$ besitzt die erste Ableitung zwei Nullstellen und G_{f_a} besitzt zwei Stellen mit waagrechter Tangente.

Fall 2: eine Nullstelle:
Damit die erste Ableitung eine Nullstelle hat, muss $D = 0$ gelten:

$$
\begin{aligned}
& D = 0 \\
\iff \quad & \frac{a^2}{4} - 36 = 0 && |+36 \\
\iff \quad & \frac{a^2}{4} = 36 && |\cdot 4 \\
\iff \quad & a^2 = 144 && |\sqrt{\ } \\
\iff \quad & |a| = 12
\end{aligned}
$$

Für $a = \pm 12$ besitzt die erste Ableitung genau eine Nullstelle und G_{f_a} besitzt eine Stelle mit waagrechter Tangente.

Fall 3: keine Nullstelle:
Damit die erste Ableitung keine Nullstellen hat, muss $D < 0$ gelten:

$$
\begin{aligned}
& D < 0 \\
\iff \quad & \frac{a^2}{4} - 36 < 0 && |+36 \\
\iff \quad & \frac{a^2}{4} < 36 && |\cdot 4 \\
\iff \quad & a^2 < 144 && |\sqrt{\ } \\
\iff \quad & |a| < 12
\end{aligned}
$$

Für $a \in]-12; 12[$ besitzt die erste Ableitung keine Nullstelle und G_{f_a} besitzt keine Stelle mit waagrechter Tangente.

1.2 **Ermitteln der zweiten Ableitung**
In Abhängigkeit von a wird nun die zweite Ableitung ermittelt:

$$
\begin{aligned}
f_a'(x) &= -3x^2 + \frac{a}{2}x - 3 \\
f_a''(x) &= -3 \cdot 2x + \frac{a}{2} = -6x + \frac{a}{2}
\end{aligned}
$$

Bestimmen der Abszisse des Wendepunktes
Zunächst wird die Nullstelle der zweiten Ableitung in Abhängigkeit von a berechnet:

$$\begin{aligned} & & f_a''(x) &= 0 & \\ \Longleftrightarrow & & -6x + \frac{a}{2} &= 0 & \left| -\frac{a}{2} \right. \\ \Longleftrightarrow & & -6x &= -\frac{a}{2} & |:(-6) \\ \Longleftrightarrow & & x &= \frac{a}{12} & \end{aligned}$$

Da die zweite Ableitung eine lineare Funktion beschreibt, liegt an der Nullstelle auch ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung und somit ein Wendepunkt von G_{f_a} vor.
Steigung der Wendetangente
Da die erste Ableitung allgemein die Steigung einer Tangente an den Graphen in einem bestimmten Punkt angibt, kann so die Steigung der Wendetangente bei $x = \frac{a}{12}$ bestimmt werden:

$$f_a'\left(\frac{a}{12}\right) = -3 \cdot \left(\frac{a}{12}\right)^2 + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{12} - 3 = -\frac{3}{144}a^2 + \frac{1}{24}a^2 - 3 = \underline{\underline{\frac{3}{144}a^2 - 3}}$$

1.3 Es werden jeweils alle Werte für a bestimmt, die die Aussagen erfüllen:

a) Die Bedingung $f_a(0) = 0$ muss also erfüllt sein:

$$\begin{aligned} & & f_a(0) &= 0 \\ \Longleftrightarrow & & -0^3 + \frac{a}{4} \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + a &= 0 \\ \Longleftrightarrow & & a &= 0 \end{aligned}$$

Die Aussage ist erfüllt für $\underline{\underline{a = 0}}$.

b) Damit bei $x = 2$ ein Maximum der Funktion liegt, müssen die zwei Bedingungen $f_a'(2) = 0$ (waagrechte Tangente) und $f_a''(2) < 0$ (Maximum) erfüllt sein.

$$\begin{aligned} & & f_a'(2) &= 0 & \\ \Longleftrightarrow & & -3 \cdot 2^2 + \frac{a}{2} \cdot 2 - 3 &= 0 & \\ \Longleftrightarrow & & -12 + a - 3 &= 0 & |+15 \\ \Longleftrightarrow & & a &= 15 & \end{aligned}$$

Eine potentielle Lösung ist $a = 15$. Es wird geprüft ob dies auch die zweite Bedingung erfüllt:

$$f_{15}''(2) = -6 \cdot 2 + \frac{15}{2} = -4{,}5 < 0$$

Da auch diese Bedingung erfüllt ist, ist die gegebene Aussage erfüllt für $\underline{\underline{a = 15}}$.

c) Es wird der Wert des Integrals in Abhängigkeit von a berechnet:

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}} f_a(x)dx &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{12}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + ax\right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{4}(\sqrt{2})^4 + \frac{a}{12}(\sqrt{2})^3 - \frac{3}{2}(\sqrt{2})^2 + a \cdot \sqrt{2} - 0 \\ &= -1 + \frac{a}{6} \cdot \sqrt{2} - 3 + a \cdot \sqrt{2} = -4 + \frac{7}{6}a \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

Damit kann ein Wert für a bestimmt werden, sodass sich der gegebene Wert des Integrals ergibt:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sqrt{2}} f_a(x)dx = -4 + \frac{7}{\sqrt{6}} \\ \iff \quad & -4 + \frac{7}{6}a \cdot \sqrt{2} = -4 + \frac{7}{\sqrt{6}} && \mid +4 \\ \iff \quad & \frac{7}{6}a \cdot \sqrt{2} = \frac{7}{\sqrt{6}} && \mid \cdot \frac{6}{7} \\ \iff \quad & a \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6} && \mid : \sqrt{2} \\ \iff \quad & a = \sqrt{\frac{6}{2}} \\ \iff \quad & a = \sqrt{3} \end{aligned}$$

Die Aussage ist für $\underline{\underline{a = \sqrt{3}}}$ erfüllt.

d) Die Bedingung $f_a'(x) = f_a''(x)$ muss also erfüllt sein:

$$\begin{aligned} & f_a'(1) = f_a''(1) \\ \iff \quad & -3 \cdot 1^2 + \frac{a}{2} \cdot 1 - 3 = -6 \cdot 1 + \frac{a}{2} \\ \iff \quad & -3 + \frac{a}{2} - 3 = -6 + \frac{a}{2} \\ \iff \quad & -6 + \frac{a}{2} = -6 + \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Da beide Seiten identisch sind, ist die Aussage unabhängig von a und damit für alle $\underline{\underline{a \in \mathbb{R}}}$ erfüllt.

Interpretation: Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass für alle Funktionen der Funktionenschar $f_a(x)$ ein Schnittpunkt der ersten und zweiten Ableitung bei $x = 1$ vorliegt und somit bei $x = 1$ unabhängig von a Steigung und Krümmung von G_{f_a} übereinstimmen.

2.1 Es können verschiedene Informationen aus den gegebenen Graphen abgelesen werden. Da die Funktion $g(x)$ dritten Grades ist, müssen es mindestens vier unabhängige Informationen sein, damit ein Funktionsterm ermittelt werden kann. Eine Möglichkeit sind folgende Informationen:

- Hochpunkt von G_g bei $(3|2)$ $\Rightarrow$ $g(3) = 2$ (I) und $g'(3) = 0$ (II)
- Nullstelle der Funktion $g(x)$ bei $x = -2$ $\Rightarrow$ $g(-2) = 0$ (III)
- Hochpunkt von $G_{g'}$ bei $x = 0$ $\Rightarrow$ $g''(0) = 0$ (IV)

Es ergeben sich die Gleichungen I bis IV zur Bestimmung des Funktionsterms. Für diesen und die Ableitungen gilt allgemein:

$$\begin{aligned} g(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ g'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ g''(x) &= 6ax + 2b \end{aligned}$$

Da die zweite Ableitung die wenigsten Parameter enthält, ist es sinnvoll mit Gleichung IV zu beginnen:

$$\begin{array}{crcl} \text{IV} & g''(0) &= 0 & \\ \Longleftrightarrow & 6a \cdot 0 + 2b &= 0 & \\ \Longleftrightarrow & 2b &= 0 & \quad | : 2 \\ \Longleftrightarrow & b &= 0 & \end{array}$$

Für die weitere Lösung der Gleichungen bieten sich zwei verschiedene Verfahren an:

Möglichkeit 1: Gauß-Algorithmus

Eine Möglichkeit zur Lösung ist der Gauß-Algorithmus. Gleichungen I bis III lauten mit $b = 0$ komplett:

$$\begin{array}{crcl} \text{I} & g(3) &= 2 \\ \Longleftrightarrow & 27a + 3c + d &= 2 \\ \text{II} & g'(3) &= 0 \\ \Longleftrightarrow & 27a + c &= 0 \\ \text{III} & g(-2) &= 0 \\ \Longleftrightarrow & -8a - 2c + d &= 0 \end{array}$$

Daraus kann die Vorzeichenmatrix erstellt werden, die dann mithilfe des Gauß-Verfahrens weiter umgeformt wird. Da in II bereits der Koeffizient von d gleich null ist, wird diese Gleichung in die dritte Zeile und III in die zweite Zeile geschrieben:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} & \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 3 & 1 & 2 \\ -8 & -2 & 1 & 0 \\ 27 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \\ \text{II}' \\ \text{III}' \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 27 & 3 & 1 & 2 \\ -35 & -5 & 0 & -2 \\ 27 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \text{II} - \text{I} \\ \text{III} \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{r} \\ \\ \text{III}'' \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 27 & 3 & 1 & 2 \\ -35 & -5 & 0 & -2 \\ 100 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad 5 \cdot \text{III}' + \text{II}'$$

Aus Gleichung III" folgt dann:

$$\begin{array}{lrl} \text{III}'' & 100a = -2 & \mid :100 \\ \Longleftrightarrow & a = -\dfrac{1}{50} & \end{array}$$

Eingesetzt in II':

$$\begin{array}{lrl} \text{II}' & -35a - 5c = -2 & \\ \Longleftrightarrow & \dfrac{35}{50}a - 5c = -2 & \mid -\dfrac{35}{50} \\ \Longleftrightarrow & -5c = -\dfrac{135}{50} & \mid :(-5) \\ \Longleftrightarrow & c = \dfrac{27}{50} & \end{array}$$

Eingesetzt in I:

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 27a + 3c + d = 2 & \\ \Longleftrightarrow & -\dfrac{27}{50} + \dfrac{81}{50} + d = 2 & \mid -\dfrac{54}{50} \\ \Longleftrightarrow & d = \dfrac{46}{50} & \end{array}$$

Damit lautet die komplette Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{g(x) = \frac{1}{50}(-x^3 + 27x + 46)}}$$

Möglichkeit 2: Gleichsetzungsverfahren

Aus Gleichung II folgt mit $b = 0$:

$$\begin{array}{lrl} & g'(3) = 0 & \\ \Longleftrightarrow & 27a + c = 0 & \mid -27a \\ \Longleftrightarrow & c = -27a & \end{array}$$

Eingesetzt in Gleichung I und III folgt:

$$\begin{array}{lr} \text{I} & g(3) = 2 \\ \Longleftrightarrow & 27a + 3 \cdot (-27a) + d = 2 \\ \Longleftrightarrow & -54a + d = 2 \\ & \\ \text{II} & g(-2) = 0 \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & -8a - 2\cdot(-27a) + d = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & 46a + d = 0 \\
\text{II} - \text{I} \quad & 46a - (-54a) = 0 - 2 \\
\Longleftrightarrow \quad & 100a = -2 \qquad |:100 \\
\Longleftrightarrow \quad & a = -\frac{1}{50}
\end{aligned}
$$

Mit $c = -27a$ folgt daraus direkt $c = \frac{27}{50}$. Außerdem kann nun a in Gleichung I oder III eingesetzt werden. Hier wird in Gleichung I eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
& -54\cdot\left(-\frac{1}{50}\right) + d = 2 \qquad \left| -\frac{54}{50}\right. \\
\Longleftrightarrow \quad & d = \frac{46}{50}
\end{aligned}
$$

Die komplette Funktionsgleichung lautet also:

$$
\underline{\underline{g(x) = \frac{1}{50}(-x^3 + 27x + 46)}}
$$

2.2 *Möglichkeit 1:* Lösung durch Rechnung

Ermitteln der zweiten Ableitung

Zunächst wird der Term der zweiten Ableitung bestimmt:

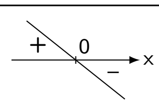
$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{50}(-x^3 + 27x + 46) \\
g'(x) &= \frac{1}{50}(-3x^2 + 27) \\
g''(x) &= \frac{1}{50}(-6x) = -\frac{3}{25}x
\end{aligned}
$$

Krümmungsverhalten

Es wird die Nullstelle der zweiten Ableitung bestimmt:

$$
\begin{aligned}
& g''(x) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & -\frac{3}{25}x = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & x = 0
\end{aligned}
$$

Es wird nun eine Vorzeichentabelle erstellt:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$	Skizzen
$g''(x)$	$+$	0	$-$	
G_g	↺	WEP	↷	

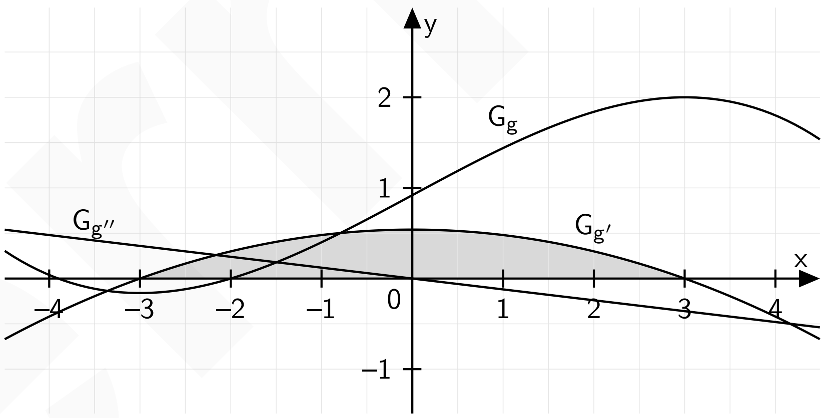
Der Graph G_g ist somit im Intervall $]-\infty; 0]$ linksgekrümmt und im Intervall $[0; \infty[$ rechtsgekrümmt.

Möglichkeit 2: Lösung mithilfe der gegebenen Abbildung
Da in der Abbildung bereits der Graph der ersten Ableitung gezeigt ist, kann die Aufgabe auch anhand der Abbildung gelöst werden.
Ist der Graph der ersten Ableitung steigend, so hat die zweite Ableitung einen positiven Wert.
Fällt der Graph der ersten Ableitung, ist die zweite Ableitung dort negativ.
Das Maximum der ersten Ableitung entspricht dann einem Wendepunkt von G_g.
Der Graph G_g ist somit im Intervall $]-\infty; 0]$ linksgekrümmt und im Intervall $[0; \infty[$ rechtsgekrümmt.

2.3 **Ermitteln der zweiten Ableitung**
Es wird der Term der zweiten Ableitung ermittelt (falls diese in der letzten Teilaufgabe noch nicht ermittelt wurde):

$$g'(x) = \frac{1}{50}(-3x^2 + 27)$$
$$g''(x) = \frac{1}{50}(-6x) = -\frac{3}{25}x$$

Grafische Darstellung
Es handelt sich um die Funktionsgleichung einer linearen Funktion, die durch den Ursprung verläuft. Zur Darstellung können gegebenenfalls noch die Koordinaten weiterer Punkte bestimmt werden.



2.4 Markierung siehe Teilaufgabe 2.3
Für die Berechnung der Maßzahl A der Fläche wird verwendet, dass $g'(x)$ die Ableitung von $g(x)$ ist und somit $g(x)$ eine Stammfunktion von $g'(x)$ ist. Desweiteren wurden die Funktionswerte $g(-3)$ und $g(3)$ bereits in Teilaufgabe 2.2 bestimmt:

$$A = \int_{-3}^{3} g'(x)dx = [g(x)]_{-3}^{3} = g(3) - g(-3) = 2 - \left(-\frac{4}{25}\right) = \underline{\underline{\frac{54}{25}}} \text{ [FE]}$$

3.1 **Definitionsmenge**
Da t die Zeit in Stunden nach Mitternacht ist und der Imbiss von 9 Uhr bis 15 Uhr geöffnet hat, ist eine sinnvolle Definitionsmenge $\underline{\underline{D_b = [9;\ 15]}}$.

Rundungsgenauigkeit
Die Funktion ist ein Modell für die Anzahl der Besucher im Imbiss. Da immer nur eine ganze Anzahl an Besuchern auftreten kann, ist es sinnvoll, die Funktionswerte auf ganze Zahlen zu runden.

3.2 Zum Zeitpunkt der Eröffnung bedeutet $t = 9$. Es wird der Funktionswert an dieser Stelle bestimmt und entsprechende gerundet:

$$b(9) = 20 \cdot (9+4) \cdot e^{-(9-12)^2} = 260 \cdot e^{-9} \approx 0$$

Zum Zeitpunkt der Eröffnung ist also noch nicht mit einem Besucher zu rechnen.

3.3 **Ermitteln der ersten Ableitung**
Für die Berechnung der ersten Ableitung mithilfe von Ketten- und Produktregel ist es sinnvoll den Exponenten noch umzuformen. Da es eine Ableitung nach der Zeit ist, wird diese mit $\dot{b}(t)$ bezeichnet.

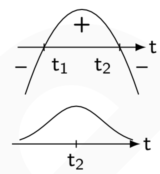
$$\begin{aligned}
b(t) &= 20(t+4) \cdot e^{-(t-12)^2} = 20(t+4) \cdot e^{-(t^2-24t+144)} \\
&= 20(t+4) \cdot e^{-t^2+24t-144} \\
\dot{b}(t) &= 20\left[(t+4)' \cdot e^{-t^2+24t-144} + (t+4) \cdot \left(e^{-t^2+24t-144}\right)'\right] && \text{(Ans. Produktregel)} \\
&= 20\left[(1) \cdot e^{-t^2+24t-144} + (t+4) \cdot e^{-t^2+24t-144} \cdot (-t^2+24t-144)'\right] && \text{(Ans. Kettenregel)} \\
&= 20\left(e^{-t^2+24t-144} + (t+4) \cdot e^{-t^2+24t-144} \cdot (-2t+24)\right) && \text{(Anwendung)} \\
&= 20\left(e^{-t^2+24t-144} + (t+4) \cdot (-2t+24) \cdot e^{-t^2+24t-144}\right) && \text{(Ausmultiplizieren)} \\
&= 20\left(e^{-t^2+24t-144} + (-2t^2+16t+96) \cdot e^{-t^2+24t-144}\right) && \text{((}e^{-t^2+24t-144}\text{) ausklammern)} \\
&= 20(-2t^2+16t+97) \cdot e^{-t^2+24t-144}
\end{aligned}$$

Maximale Besucherzahl
Zunächst werden die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt. Da der Exponentialterm nie null wird, gilt dafür:

$$\begin{aligned}
& & \dot{b}(t) &= 0 \\
&\iff & -2t^2+16t+97 &= 0 \\
&\iff & t_{1;2} &= \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 97}}{2 \cdot (-2)} \\
&\iff & t_{1;2} &= \frac{-16 \pm \sqrt{1032}}{-4}
\end{aligned}$$

$$\iff \qquad t_1 \approx -4{,}03 \quad \text{oder} \quad t_2 \approx 12{,}03$$

Nur t_2 ist von Interesse, da $t_1 \notin D_b$. Es wird eine Monotonietabelle erstellt um zu ermitteln, welche Art von Punkt bei t_2 vorliegt:

t	$9 \leq t < t_2$	$t = t_2$	$t_2 < t \leq 15$	Skizzen
$20(-2t^2 + 16t + 97)$	$+$	0	$-$	
$e^{-t^2+24t-144}$	$+$	$+$	$+$	
$\dot{b}(t)$	$+$	0	$-$	
G_b	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	

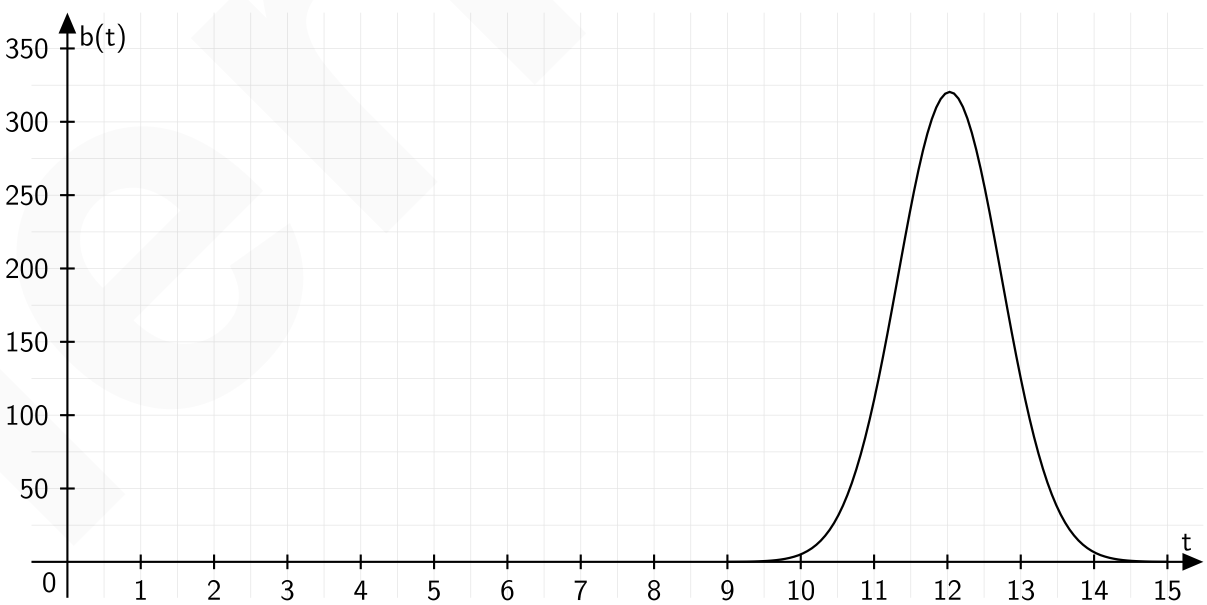
Somit ist zum Zeitpunkt $\underline{\underline{t \approx 12{,}03}}$ mit der maximalen Zahl der Besucher zu rechnen. Es wird der Wert zum diesem Zeitpunkt ermittelt:

$$b(12{,}03) = 20(12{,}03 + 4) \cdot e^{-(12{,}03-12)^2} = 20 \cdot 16{,}03 \cdot e^{-(0{,}03)^2} \approx \underline{\underline{320}}\,[\text{Besucher}]$$

3.4 Für die graphische Darstellung wird eine Wertetabelle als Hilfestellung erstellt:

t	9	10	10,5	11	11,5	12,03	12,5	13	13,5	14	15
$b(t)$	0	5	31	110	241	320	257	125	37	7	0

Mithilfe dieser Werte kann nun die grafische Darstellung erfolgen:



1.0 Gegeben ist die Ableitungsfunktion $f'_k(x) = 3x^2 - 6x + k$ mit $D_{f'_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie die Gleichung der Funktion $f_k(x)$, wenn der Graph G_{f_k} dieser Funktion durch den Koordinatenursprung verläuft.
[mögliches Ergebnis: $f_k(x) = x^3 - 3x^2 + kx$] **2 BE**

1.2 Bestimmen Sie Abszisse, Anzahl und Vielfachheit der Nullstellen in Abhängigkeit von k. **5 BE**

1.3 Ermitteln Sie einen Wert für k, so dass die Tangente an $x = \frac{5}{2}$ die Steigung 3 hat. **2 BE**

1.4 Zeigen Sie, dass die Wendestelle der Funktion unabhängig von k, die Koordinaten des Wendepunktes jedoch nicht unabhängig von k sind und geben Sie diese Koordinaten an. **4 BE**

1.5 Ermitteln Sie einen Wert für k, so dass das Integral $\int_1^2 f_k(x)dx$ den Wert $\frac{23}{4}$ annimmt. **4 BE**

1.6 Stellen Sie die Graphen von $f_2(x)$ und $f_3(x)$ für $-0{,}5 \leq x \leq 2{,}5$ in einem kartesischen Koordinatensystem grafisch dar.
Maßstab: x-Achse: 1 LE = 2 cm; y-Achse: 1 LE = 1 cm. **4 BE**

2.0 Für die Herstellung hochprozentigen Alkohols wird eine vorher angesetzte Maische in einer Destille erhitzt. Da der Siedepunkt von Alkohol geringer als der von Wasser ist, kann damit der Alkohol vom Wasser getrennt werden. Das Produkt wird dann abgekühlt und aufgefangen und gegebenenfalls weiterverarbeitet. Im Prozess werden jedoch noch weitere, teilweise giftige Stoffe freigesetzt, die vom Endprodukt fernzuhalten sind, da der entstandene Alkohol sonst ungenießbar wird. Zu Beginn des Destilliervorgangs ensteht der sogenannte Vorlauf, der separat aufgefangen wird. Danach ensteht das eigentliche Produkt. Nach einer gewissen Zeit setzt dann der sogenannte Nachlauf ein, der ebenfalls vom Produkt separiert wird. Vor- und Nachlauf enthalten die schädlichen Stoffe und werden deshalb entsorgt.
Eine Größe, mit der man die Qualität des entstandenen Produkts einschätzen kann ist die Güte des Alkohols. Im Folgenden soll die zeitliche Entwicklung der Güte G(t) des Produkts während des Destilliervorgangs untersucht werden. Dabei gibt G(t) die Güte in Prozent und t die Zeit in Minuten nach Beginn des Vorgangs an.
Die Werte sind im Folgenden auf zwei Stellen nach dem Komma zu runden.

2.1 Bei einem bestimmten Hersteller werden die folgenden Werte aufgenommen:

Zeit t in min	0	1	2	3	4	6	8	10
G(t) in %	0	50	75	60	40	12	5	0

Stellen Sie die Wertepaare in einem kartesischen Koordinatensystem geeignet dar. **3 BE**

2.2.0 Um genauere Daten zu finden soll die Kurve durch eine passende Modellfunktion dargestellt werden. Als Ansatz wird die Funktion $G(t) = c \cdot (t - s)^2 \cdot e^{-(t-1)}$ mit $c, s \in \mathbb{R}$ verwendet.

2.2.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter c und s, wenn die Werte der Tabelle für 0 Minuten und für 1 Minute dem Modell zu Grunde gelegt werden.
[mögliches Ergebnis: $c = 50, s = 0$] **4 BE**

2.2.2 Bestimmen Sie den Wert der Güte, der sich nach einer langen Zeit einstellt und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. **3 BE**

2.2.3 Zeichnen Sie den Graph der Funktion $G(t)$ für $0 \leq t \leq 10$ in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 2.1 ein. (Hinweis: Die Wertepaare der Tabelle aus 2.1 stimmen nicht immer exakt mit dem Verlauf des Graphen überein) **3 BE**

2.2.4 Der Hersteller entscheidet sich folgende Regeln festzulegen:

1. Der Vorlauf endet, wenn die Güte einen Wert von 70 % überschreitet.
2. Der Nachlauf beginnt, wenn die Güte einen Wert von 10 % unterschreitet.

Bestimmen Sie basierend auf diesen Regeln anhand der graphischen Darstellung möglichst exakt den Zeitraum in dem das eigentliche Produkt aufgefangen wird. **3 BE**

2.2.5 Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Güte maximal wird und geben Sie den Wert der Güte zu diesem Zeitpunkt an. **5 BE**

2.2.6 Ermitteln Sie zu welchem Zeitpunkt die Abnahme der Güte am stärksten ist. **5 BE**

1.1 Zunächst werden die allgemeinen Stammfunktionen von $f'_k(x)$ bestimmt, da eine dieser Funktion die gesuchte Funktion $f_k(x)$ ist:

$$\int f'_k(x)dx = x^3 - 3x^2 + kx + C$$

Zusätzlich ist gegeben, dass der Graph der Funktion $f_k(x)$ durch den Koordinatenursprung verläuft, sodass damit ein Wert für C gefunden werden kann:

$$\begin{aligned} & & f_k(0) &= 0 \\ &\Longleftrightarrow & 0^3 - 3 \cdot 0^2 + k \cdot 0 + C &= 0 \\ &\Longleftrightarrow & C &= 0 \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktionsgleichung lautet also $\underline{\underline{f_k(x) = x^3 - 3x^2 + kx}}$.

1.2 Als erstes werden die Nullstellen allgemein ermittelt:

$$\begin{aligned} & & f_k(x) &= 0 \\ &\Longleftrightarrow & x^3 - 3x^2 + kx &= 0 \\ &\Longleftrightarrow & (x^2 - 3x + k) \cdot x &= 0 \\ &\Longleftrightarrow & x_1 &= 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 3x + k = 0 \end{aligned}$$

Für den quadratischen Term gilt:

$$x_{2;3} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4k}}{2}$$

Es werden nun folgende Überlegungen getroffen:

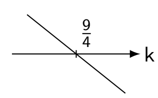
<u>*1. Überlegung*</u>: Wieviele Nullstellen hat der quadratische Term in Abhängigkeit der Diskriminante.

<u>*2. Überlegung*</u>: Für welche Werte von k fallen Nullstellen zusammen.

Es wird untersucht, für welche Wert von k die Diskriminante $D = 9 - 4k$ gleich null, also die Bedingung $D = 0$ erfüllt ist:

$$\begin{aligned} & & D &= 0 & & \\ &\Longleftrightarrow & 9 - 4k &= 0 & &| -9 \\ &\Longleftrightarrow & -4k &= -9 & &| : (-4) \\ &\Longleftrightarrow & k &= \frac{9}{4} & & \end{aligned}$$

Nun kann in Abhängigkeit von k eine Vorzeichentabelle der Diskriminante erstellt werden:

k	$k < \frac{9}{4}$	$k = \frac{9}{4}$	$\frac{9}{4} < k$	Skizzen
Diskriminante: D	$+$	0	$-$	

Demnach besitzt der quadratische Term für $k < \frac{9}{4}$ zwei Nullstellen, für $k = \frac{9}{4}$ eine Nullstelle und für $k > \frac{9}{4}$ keine Nullstelle. Darauf basierend können Fälle für die gesamte Anzahl der Nullstellen unterschieden werden:

Fall 1: keine Nullstelle
Da bereits eine Nullstelle $x_1 = 0$ unabhängig von k feststeht, kann dieser Fall **nicht** eintreten.

Fall 2: eine Nullstelle
Da mit $x_1 = 0$ bereits eine Nullstelle feststeht, kann dieser Fall hier nur eintreten, wenn sich durch den quadratischen Term keine weiteren Nullstellen ergeben. Für $k > \frac{9}{4}$ liegt also nur eine einfache Nullstelle bei $\underline{\underline{x_1 = 0}}$ vor.

Fall 3: zwei Nullstellen
Eine Möglichkeit ist, dass durch den quadratischen Term nur eine weitere Nullstelle hinzukommt, was für $k = \frac{9}{4}$ der Fall ist. Für $k = \frac{9}{4}$ existiert demnach eine einfache Nullstelle bei $\underline{\underline{x_1 = 0}}$ und eine doppelte Nullstelle bei $x_{2;3} = \frac{3 \pm 0}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$.

Eine weitere Option für zwei Nullstellen ist, dass eine der Nullstellen des quadratischen Terms mit der Nullstelle $x_1 = 0$ zusammenfällt. Wegen

$$x_{2;3} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4k}}{2}$$

kann dies nur für $\sqrt{9-4k} = 3$ und damit für $k = 0$ gelten. Für $k = 0$ liegt also eine doppelte Nullstelle $\underline{\underline{x_{1;2} = 0}}$ und eine einfache Nullstelle $x_3 = \frac{3+3}{2} = \underline{\underline{3}}$ vor.

Fall 4: drei Nullstellen
Für alle anderen Werte von k liegen drei einfache Nullstellen $\underline{\underline{x_1 = 0}}$, $\underline{\underline{x_2 = \frac{3 - \sqrt{9-4k}}{2}}}$ und $\underline{\underline{x_3 = \frac{3 + \sqrt{9-4k}}{2}}}$ vor.

1.3 **Ermitteln der ersten Ableitung**
Die erste Ableitung ist in diesem Fall in der Angabe bereits zu $f_k'(x) = 3x^2 - 6x + k$ vorgegeben.

Bestimmen des Wertes für k
Wenn die Tangente an $x = \frac{5}{2}$ die Steigung 3 haben soll, so muss also $f_k'(\frac{5}{2}) = 3$ gelten:

$$\begin{aligned} & f_k'\left(\frac{5}{2}\right) = 3 \\ \Longleftrightarrow \quad & 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{5}{2} + k = 3 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{75}{4} - \frac{30}{2} + k = 3 \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{15}{4} + k = 3 \qquad \left| - \frac{15}{4} \right. \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad k = -\frac{3}{4}$$

1.4 **Ermitteln der zweiten Ableitung**

$$f_k'(x) = 3x^2 - 6x + k$$
$$f_k''(x) = 6x - 6$$

Koordinaten des Wendepunktes
Es wird die Nullstelle der zweiten Ableitung bestimmt:

$$\begin{aligned} & & f_k''(x) &= 0 & & \\ &\Longleftrightarrow & 6x - 6 &= 0 & &\mid +6 \\ &\Longleftrightarrow & 6x &= 6 & &\mid :6 \\ &\Longleftrightarrow & x &= 1 & & \end{aligned}$$

Da es sich bei der zweiten Ableitung um eine lineare Funktion handelt, liegt an dieser Nullstelle auch ein Vorzeichenwechsel und somit ein Wendepunkt von G_{f_k} vor. Die Abszisse $x = 1$ ist unabhängig von k. Es wird der Funktionswert an dieser Stelle bestimmt:

$$f_k(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + k \cdot 1 = 1 - 3 + k = -2 + k$$

Der Funktionswert des Wendepunktes ist somit nicht unabhängig von k. Die Koordinaten lauten $\underline{\underline{WEP\,(1 \mid -2+k)}}$.

1.5 Der Wert des Integrals wird zunächst in Abhängigkeit von k berechnet:

$$\int_1^2 f_k(x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{k}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2^3 + \frac{k}{2} \cdot 2^2 - \left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 - 1^3 + \frac{k}{2} \cdot 1^2\right)$$
$$= 4 - 8 + 2k - \frac{1}{4} + 1 - \frac{k}{2} = -\frac{13}{4} + \frac{3}{2}k$$

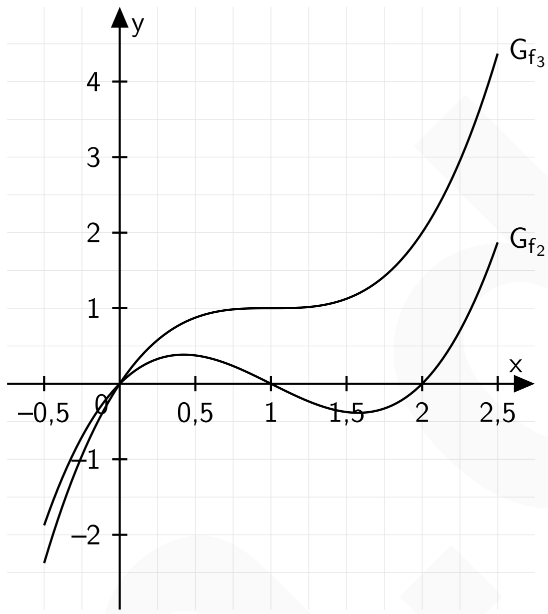
Nun kann der Wert für k bestimmt werden, der die gegebene Bedingung erfüllt:

$$\begin{aligned} & & -\frac{13}{4} + \frac{3}{2}k &= \frac{23}{4} & &\mid + \frac{13}{4} \\ &\Longleftrightarrow & \frac{3}{2}k &= \frac{36}{4} & &\mid \cdot \frac{2}{3} \\ &\Longleftrightarrow & \underline{\underline{k}} &\underline{\underline{= 6}} & & \end{aligned}$$

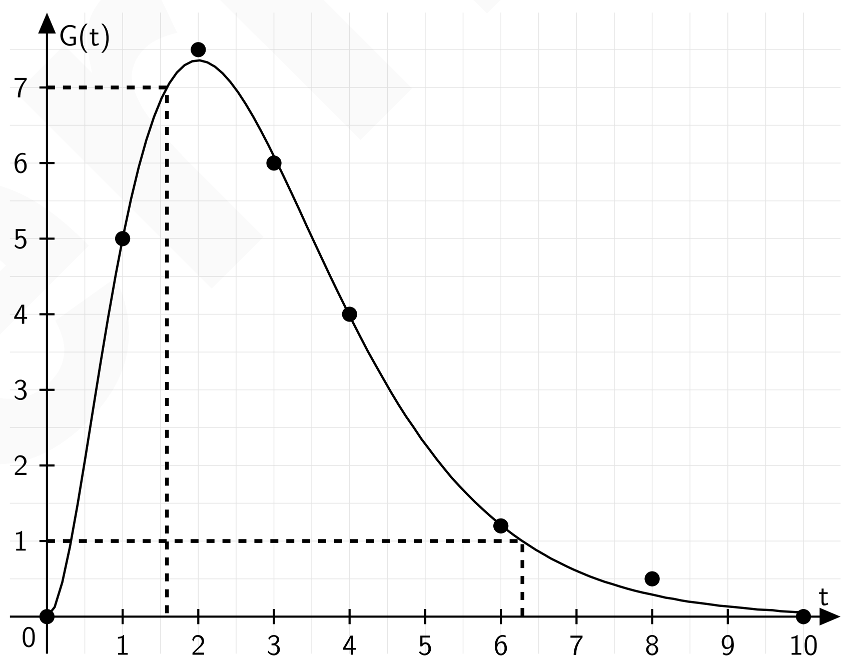
1.6 Für die graphische Darstellung wird eine Wertetabelle für beide Funktionen als Hilfestellung erstellt:

x	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$f_2(x)$	−1,88	0	0,38	0	−0,38	0	1,88
$f_3(x)$	−2,38	0	0,88	1	1,13	2	4,38

Mithilfe dieser Werte kann nun die grafische Darstellung erfolgen:



2.1 Die Wertepaare werden als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem eingezeichnet:



2.2.1 **Werte der Parameter**

Zur Bestimmung von c und s sollen die Funktionswerte $G(0) = 0$ (I) und $G(1) = 50$ (II) verwendet werden.

$$\begin{aligned} \text{I} \qquad & G(0) = 0 \\ \iff \qquad & c \cdot (0-s)^2 \cdot e^{-(0-1)} = 0 \\ \iff \qquad & c \cdot s^2 \cdot e^1 = 0 \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass entweder c oder s gleich null sein muss. Für $c = 0$ würde aber auch $G(t) = 0$, sodass der Funktionwert $G(1) = 50$ nicht möglich wäre. Somit muss $\underline{\underline{s = 0}}$ gelten.

$$\begin{aligned} \text{II} \qquad & G(1) = 50 \\ \iff \qquad & c \cdot (1-s)^2 \cdot e^{-(1-1)} = 50 \qquad (s = 0 \text{ einsetzen}) \\ \iff \qquad & c \cdot (1-s)^2 \cdot 1 = 50 \\ \iff \qquad & \underline{\underline{c = 50}} \end{aligned}$$

Die Funktion lautet also $G(t) = 50t^2 \cdot e^{-(t-1)}$.

2.2.2 **Wert nach langer Zeit**

Der Wert nach langer Zeit entspricht dem Grenzwert für $t \to \infty$:

$$t \to \infty\colon\ G(t) = \underbrace{50t^2}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{-(t-1)}}_{\to 0} \to 0 \quad (\text{da e-Fkt. dominiert})$$

Interpretation im Sachzusammenhang

Im Sachzusammenhang bedeutet dies, das die Güte für sehr lang andauernde Destilliervorgänge gegen null strebt und es somit sinnvoll ist, den Vorgang nach einer gewissen Zeit abzubrechen.

2.2.3 Für die graphische Darstellung wird eine Wertetabelle mit Funktionswerten erstellt.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
G(t)	0	50	73,58	60,9	39,83	22,89	12,13	6,07	2,92	1,36	0,62

Mithilfe dieser Werte kann die grafische Darstellung erfolgen. Siehe Abbildung in Teilaufgabe 2.1

2.2.4 Um die Werte besser ablesen zu können wurden in der Abbildung von Teilaufgabe 2.1 gestrichelte Linien hinzugefügt, die das ablesen erleichtern sollen.

Der Wert von 70 % wird bei etwa $t \approx 1{,}3$ überschritten und der Wert 10 % bei etwa $t \approx 6{,}3$ wieder unterschritten. Im Zeitraum $1{,}3 \leq t \leq 6{,}3$ entsteht also das eigentliche Produkt.

2.2.5 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Mithilfe von Ketten- und Produktregel wird zunächst die erste Ableitung der Funktion bestimmt. Da es sich um eine Zeitableitung handelt, wird diese mit $\dot{G}(t)$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}
G(t) &= 50t^2 \cdot e^{-(t-1)} = 50t^2 \cdot e^{-t+1} \\
\dot{G}(t) &= 50 \cdot \left[(t^2)' \cdot e^{-t+1} + t^2 \cdot (e^{-t+1})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\
&= 50 \cdot \left((2t) \cdot e^{-t+1} + t^2 \cdot e^{-t+1} \cdot (-1)\right) && \text{(Anwendung)} \\
&= 50 \cdot \left(2t \cdot e^{-t+1} - t^2 \cdot e^{-t+1}\right) && \text{((}e^{-t+1}\text{) ausklammern)} \\
&= 50 \cdot (-t^2 + 2t) \cdot e^{-t+1}
\end{aligned}$$

Zeitpunkt mit maximaler Güte

Es wird die Nullstelle der ersten Ableitung ermittelt. Da der Exponentialterm nie null wird, gilt:

$$\begin{aligned}
& & \dot{G}(t) &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & -t^2 + 2t &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & (-t+2) \cdot t &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & -t_1 + 2 &= 0 \quad \text{oder} \quad t_2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow & t_1 &= 2 \quad \text{oder} \quad t_2 = 0
\end{aligned}$$

Den bisherigen Teilaufgaben ist zu entnehmen, dass es sich bei $\underline{\underline{t_1 = 2}}$ um den Zeitpunkt mit maximaler Güte handelt.

Wert der maximalen Güte

Es wird der Funktionswert für $t = 2$ ermittelt:

$$G(2) = 50 \cdot 2^2 \cdot e^{-(2-1)} = 200e^{-1} = 73{,}58$$

Die maximale Güte beträgt $\underline{\underline{73{,}58}}$ [%].

2.2.6 **Ermitteln der zweiten Ableitung**

Um das Maximum der Abnahme zu finden, wird die zweite Ableitung benötigt:

$$\begin{aligned}
\dot{G}(t) &= 50 \cdot (-t^2 + 2t) \cdot e^{-t+1} \\
\ddot{G}(t) &= 50 \cdot \left[(-t^2 + 2t)' \cdot e^{-t+1} + (-t^2 + 2t) \cdot (e^{-t+1})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\
&= 50 \cdot \left((-2t+2) \cdot e^{-t+1} + (-t^2 + 2t) \cdot e^{-t+1} \cdot (-1)\right) && \text{(Anwendung)} \\
&= 50 \cdot \left((-2t+2) \cdot e^{-t+1} - (-t^2 + 2t) \cdot e^{-t+1}\right) && \text{((}e^{-t+1}\text{) ausklammern)} \\
&= 50 \cdot (t^2 - 4t + 2) \cdot e^{-t+1}
\end{aligned}$$

Zeitpunkt mit stärkster Abnahme der Güte

Es werden die Nullstellen der zweiten Ableitung bestimmt. Da der Exponentialterm nie null werden kann, gilt für die Nullstellen:

$$
\begin{aligned}
& & \ddot{G}(t) &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & t^2 - 4t + 2 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow & t_{3;4} &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} \\
&\Longleftrightarrow & t_{3;4} &= \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} \\
&\Longleftrightarrow & t_{3;4} &= \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} \\
&\Longleftrightarrow & t_{3;4} &= \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\
&\Longleftrightarrow & t_{3;4} &= 2 \pm \sqrt{2} \\
&\Longleftrightarrow & t_3 \approx 0{,}59 \quad &\text{oder} \quad t_4 \approx 3{,}41
\end{aligned}
$$

Anhand der letzten Teilaufgaben kann nun entschieden werden, dass es sich bei t_4 um den gesuchten Zeitpunkt handelt, da der Graph G_G hier fallend ist und ein Krümmungswechsel vorliegt. Die Güte nimmt also nach $\underline{\underline{3{,}41}}$ [min] am stärksten ab.

In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(2|1|-1)$, $B(0|4|-2)$ und $C(-1|-2|0)$ sowie die Ebenenschar $F_k : (3-k)x_1 + x_2 + kx_3 - 1 = 0$ gegeben.

1 Die Punkte A, B und C spannen eine Ebene E auf. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene in Koordinatenform.
[mögliches Ergebnis: $E : x_2 + 3x_3 + 2 = 0$] **4 BE**

2 Finden Sie für $k = 2$ die Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen E und F_k. **4 BE**

3 Bestimmen Sie den Wert für k, sodass die Ebenen E und F_k echt parallel sind. **4 BE**

4.0 Im Folgenden ist $k = 3$.

4.1 Gegeben ist zusätzlich der Punkt $D(7|-6|2)$, der zwischen den beiden Ebenen E und F_3 liegt. Überprüfen Sie rechnerisch, ob dieser näher an der Ebene E oder an der Ebene F_3 liegt. **5 BE**

4.2 Begründen Sie kurz, warum die Punkte A, B, C und D im gegebenen Kontext eine Pyramide bilden müssen und berechnen Sie deren Volumen. **4 BE**

4.3 Weisen Sie nach, dass es sich bei dem Dreieck ABC um ein spitzwinkliges Dreieck handelt. **4 BE**

1 **Ebenengleichung in Parameterform**

Um die Gleichung in Koordinatenform zu finden, wird zunächst eine Gleichung Parameterform aufgestellt. Diese wird aus den Koordinaten der Punkte A, B und C ermittelt, da diese alle in der Ebene liegen:

$$E : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-1 \\ -2-(-1) \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -1-2 \\ -2-1 \\ 0-(-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } p,q \in \mathbb{R}$$

Ebenengleichung in Koordinatenform

Aus den Kreuzprodukt der Spannvektoren der Ebene wird der Normalenvektor der Ebene E bestimmt:

$$\vec{n}_E = \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) \\ (-1) \cdot (-3) - (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot (-3) - 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Mit dem Normalenvektor der Ebene und den Koordinaten des Punktes A, der in der Ebene liegt, kann nun zunächst die Normalenform der Ebene aufgestellt werden, die dann zur Koordinatenform umgeformt wird:

$$E : \vec{n}_E \circ (\vec{x} - \overrightarrow{OA}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 15 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_2 - 5 \\ x_3 - 15 \end{pmatrix} = 5x_2 + 15x_3 + 10 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{E : x_2 + 3x_3 + 2 = 0}}$$

2 *Möglichkeit 1:* Ebenen in Koordinatenform:

Die Gleichungen der Ebenen für $k = 2$ lauten nun:

$$E : x_2 + 3x_3 + 2 = 0 \text{ (I)} \qquad F_2 : x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \text{ (II)}$$

An dieser Stelle müsste durch Umformung eine der Koeffizienten auf null gebracht werden. Da hier bereits die x_1-Komponente der Ebene E verschwindet, kann dieser Schritt übersprungen werden. Es wird nun $x_3 = \sigma$ gesetzt. Eingesetzt in Gleichung I folgt:

$$\begin{aligned} & x_2 + 3x_3 + 2 = 0 & \\ \Longleftrightarrow \quad & x_2 + 3\sigma + 2 = 0 & \quad |-(3\sigma+2) \\ \Longleftrightarrow \quad & x_2 = -2 - 3\sigma & \end{aligned}$$

Nun kann x_2 und x_3 in Gleichung II eingesetzt werden:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow \quad && x_1 + (-2-3\sigma) + 2\sigma - 1 &= 0 && \\ \Longleftrightarrow \quad && x_1 - 3 - \sigma &= 0 && \mid -(-3-\sigma) \\ \Longleftrightarrow \quad && x_1 &= 3+\sigma && \end{aligned}$$

Damit ist jede der Komponenten bekannt, sodass sich eine Gleichung der Schnittgerade ergibt:

$$s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3+\sigma \\ -2-3\sigma \\ \sigma \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}} \quad \text{mit } \sigma \in \mathbb{R}$$

Möglichkeit 2: Einsetzen der Ebene in Parameterform:
Die in Aufgabe 1 bestimmte Gleichung der Ebene E in Parameterform kann komponentenweise in die Gleichung der Ebene F_2 eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} && F_2 : x_1 + x_2 + 2x_3 - 1 &= 0 && \\ \Rightarrow \quad && (2-2p-3q) + (1+3p-3q) + 2\cdot(-1-p+q) - 1 &= 0 && \\ \Longleftrightarrow \quad && 2-2p-3q+1+3p-3q-2-2p+2q-1 &= 0 && \\ \Longleftrightarrow \quad && -p-4q &= 0 && \mid +p \\ \Longleftrightarrow \quad && p &= -4q && \end{aligned}$$

Setzt man $q = \sigma$ und $p = -4q = -4\sigma$ in die Parameterform der Ebene E ein, ergibt sich die Gleichung der Schnittgeraden:

$$s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 4\sigma \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 5 \end{pmatrix}}} \quad \text{mit } \sigma \in \mathbb{R}$$

3 Damit die Ebenen parallel liegen, müssen die Normalenvektoren der Ebenen Vielfache voneinander sein. Für die Normalenvektoren der Ebenen muss also $\vec{n}_E = t \cdot \vec{n}_{F_k}$ gelten:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = t \cdot \vec{n}_{F_k} = t \cdot \begin{pmatrix} 3-k \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich so zeilenweise drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 0 = t \cdot (3-k) \\ \text{II} \quad & 1 = t \cdot 1 \\ \text{III} \quad & 3 = t \cdot k \end{aligned}$$

Aus Gleichung II folgt direkt, dass $t = 1$ gelten muss. Eingesetzt in Gleichung III:

$$\begin{aligned} \text{III} \quad & 3 = 1 \cdot k \\ \Longleftrightarrow \quad & k = 3 \end{aligned}$$

Aus Gleichung II und III folgt also $t = 1$ und $k = 3$. Eingesetzt in Gleichung I wird geprüft ob diese Werte alle Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} & 0 = 1 \cdot (3-3) \\ \Longleftrightarrow \quad & 0 = 0 \end{aligned}$$

Auch diese Gleichung ist erfüllt, die Ebenen sind für $k = 3$ also parallel.

Weiterhin muss gezeigt werden, dass die Ebenen echt parallel, also nicht identisch sind. Dafür werden die Koordinaten des Aufpunktes A von Ebene E in die Gleichung von Ebene F_3 eingesetzt:

$$\begin{aligned} & (3-3) \cdot x_1 + x_2 + 3x_3 - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & 0 \cdot 2 + 1 + 3 \cdot (-1) - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & -3 = 0 \end{aligned}$$

Die Punktprobe führt zu einer falschen Aussage. Somit liegt A nicht in der Ebene F_3 und die Ebenen sind für $\underline{\underline{k = 3}}$ echt parallel.

4.0 Es ist nun $k = 3$ und damit $F_3 : x_2 + 3x_3 - 1 = 0$.

4.1 **Gleichung der Hilfsgerade**

Um die Aufgabe zu lösen, wird eine Hilfsgerade benötigt, die senkrecht auf den Ebenen steht (auf beiden, da diese für $k = 3$ parallel sind) und durch den Punkt D verläuft. Dafür wird als Ortsvektor der Geraden der Vektor $\overrightarrow{OD}$ und als Richtungsvektor der Geraden der Normalenvektor der Ebene E verwendet, da dies garantiert, dass die Gerade durch den Punkt D und senkrecht zur Ebene verläuft.

$$h : \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \lambda \cdot \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

Schnittpunkte der Gerade mit den Ebenen

Als nächstes müssen die Schnittpunkte der HIlfsgerade mit den Ebenen bestimmt werden. Dazu werden die Komponenten von h jeweils in die Gleichung von E und F_3 eingesetzt:

$$\begin{aligned} h \cap E \quad & x_2 + 3x_3 + 2 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & (-6 + \lambda) + 3 \cdot (2 + 3\lambda) + 2 = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & -6 + \lambda + 6 + 9\lambda + 2 = 0 \quad && | -2 \\ \Longleftrightarrow \quad & 10\lambda = -2 \quad && | : 10 \\ \Longleftrightarrow \quad & \lambda = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$h \cap F_3 \quad x_2 + 3x_3 - 1 = 0$$

$$
\begin{aligned}
\iff \quad & (-6+\lambda)+3\cdot(2+3\lambda)-1=0 \\
\iff \quad & -6+\lambda+6+9\lambda-1=0 && |+1 \\
\iff \quad & 10\lambda=1 && |:10 \\
\iff \quad & \lambda=\frac{1}{10}
\end{aligned}
$$

Da der Betrag des Wertes von λ den Abstand zu den Ebenen bestimmt und $|-\frac{1}{5}| > |\frac{1}{10}|$ ist, ist der Abstand des Punktes D zur Ebene E größer als zur Ebene F. Somit ist der Punkt D näher an der Ebene F_3 als an der Ebene E.

4.2 **Begründung**

Vier Punkte bilden eine Pyramide, wenn sie nicht alle in einer Ebene liegen. Da laut Angabe A, B und C in einer Ebene liegen, Punkt D aber außerhalb dieser Ebene liegt, bilden diese vier Punkte eine Pyramide.

Volumen der Pyramide ABCD

Die Pyramide mit den Eckpunkten A, B, C und D wird aufgespannt von folgenden Vektoren:

$$
\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}5\\-7\\3\end{pmatrix}
$$

Damit gilt für das Volumen der Pyramide:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{6}\cdot|\overrightarrow{AB}\circ(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-3\cdot3-1\cdot(-7)\\1\cdot5-(-3)\cdot3\\(-3)\cdot(-7)-(-3)\cdot5\end{pmatrix}\right| \\
&= \frac{1}{6}\cdot\left|\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\14\\36\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot|(-2)\cdot(-2)+3\cdot14+(-1)\cdot36| \\
&= \frac{1}{6}\cdot|10| = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}\,[VE]
\end{aligned}
$$

4.3 Es werden zwei der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC berechnet, da sich daraus direkt der dritte Innenwinkel ergibt.

Der Innenwinkel α bei Punkt A wird eingeschlossen von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$
\cos\alpha=\frac{|\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{(-2)^2+3^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{14\cdot19}}
$$

$$
\Rightarrow \quad \alpha\approx75{,}8^\circ
$$

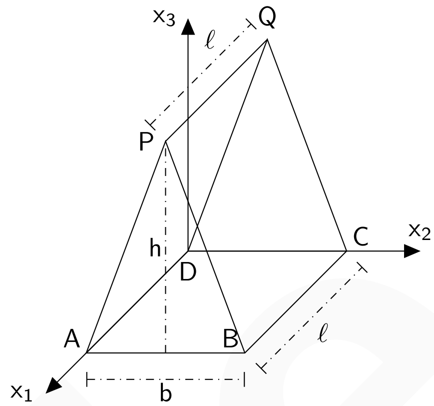
Der Innenwinkel β bei Punkt B wird eingeschlossen von den Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$:

$$\cos\beta = \frac{|\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{18}{\sqrt{14 \cdot 41}}$$

$$\Rightarrow \quad \beta \approx 41{,}3^\circ$$

Daraus ergibt sich Winkel γ bei Punkt C zu ungefähr $\gamma = 180^\circ - 75{,}8^\circ - 41{,}3^\circ = 62{,}9^\circ$. Alle Winkel sind also kleiner als 90°, sodass es sich um ein spitzwinkliges Dreieck handeln muss.

1.0 Die Abbildung zeigt dargestellt in einem kartesischen Koordinatensystem (Koordinaten in der Einheit Meter) modellhaft ein aufgebautes Zelt. Die Punkte A, B, C und D bilden ein ebenes Rechteck in der x_1x_2-Ebene. Das Zelt besitzt eine Breite von $b = 1{,}5\,\text{m}$, eine Länge von $\ell = 2{,}5\,\text{m}$ und eine Höhe von $h = 2\,\text{m}$.



1.1 Geben Sie die Koordinaten sämtlicher Punkte des Zeltes an, wenn der Punkt P senkrecht über dem Mittelpunkt der Strecke zwischen den Punkten A und B liegt. **3 BE**

1.2 Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E, die die Seitenfläche ADQP enthält. **2 BE**

1.3 Die Ebene F mit der Gleichung $F: 8x_2 + 3x_3 - 12 = 0$ enthält die Seitenfläche BCQP (Nachweis nicht erforderlich). Bestimmen Sie ohne Verwendung der Koordinaten von P und Q die Gleichung der Schnittgerade beider Ebenen und weißen Sie dann nach, dass die Punkte P und Q auf der Geraden liegen. **5 BE**

1.4 Bestimmen Sie das Volumen des Zeltes. **3 BE**

1.5 Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Zeltwände mit der x_1x_2-Ebene einschließen auf zwei Nachkommastellen genau. **2 BE**

1.6 Ermitteln Sie den exakten Abstand des Punktes P vom Koordinatenursprung. **2 BE**

2 Gegeben ist die Gleichung einer Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und die Gleichung einer Ebene $F: 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4 = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie jeweils **eine** Möglichkeit für die Werte für a, b und c, damit

a) g in der Ebene F liegt.

b) g echt parallel zur Ebene F liegt.

c) g senkrecht zur Ebene F verläuft.

8 BE

1.1 Koordinaten aller Punkte

Zunächst werden die Koordinaten der Punkte in der x_1x_2-Ebene bestimmt.

Punkt D liegt im Koordinatenursprung und hat somit die Koordinaten $\underline{\underline{D(0\,|\,0\,|\,0)}}$. Punkt A ist um die einfache Länge ℓ in Richtung x_1 verschoben und hat somit die Koordinaten $\underline{\underline{A(2{,}5\,|\,0\,|\,0)}}$. Punkt C ist um die einfache Breite des Zeltes in x_2-Richtung verschoben und hat somit die Koordinaten $\underline{\underline{C(0\,|\,1{,}5\,|\,0)}}$. Punkt B ist um ℓ und um b verschoben und hat somit die Koordinaten $\underline{\underline{B(2{,}5\,|\,1{,}5\,|\,0)}}$.

Punkt Q liegt senkrecht zwischen den Punkten C und D, seine x_1-Koordinate ist also 0, die x_2-Koordinate liegt mittig zwischen 0 und 1,5, also bei 0,75. Zudem ist der Punkt in x_3-Richtung um die einfache Höhe h verschoben. Die Koordinaten lauten also $\underline{\underline{Q(0\,|\,0{,}75\,|\,2)}}$. Punkt P ist relativ zu Q wieder um die einfache Länge ℓ in x_1-Richtung verschoben. Seine Koordinaten lauten also $\underline{\underline{P(2{,}5\,|\,0{,}75\,|\,2)}}$

1.2 Gleichung der Ebene E

Mit den Koordinaten der Punkte D, A und Q wird eine Gleichung der Ebene in Parameterform bestimmt:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + \tau \cdot \overrightarrow{DA} + \sigma \cdot \overrightarrow{DQ} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix}2{,}5\\0\\0\end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix}0\\0{,}75\\2\end{pmatrix}}} \quad \text{mit } \tau,\sigma \in \mathbb{R}$$

1.3 Schnittgerade der Ebenen E und F

Um die Gleichung einer Schnittgeraden zu bestimmen, wird die Gleichung von E komponentenweise in die Gleichung von F eingesetzt:

$$\begin{aligned}
& & 8x_2 + 3x_3 - 12 &= 0 & \\
&\Longleftrightarrow & 8 \cdot (0{,}75\sigma) + 3 \cdot (2\sigma) - 12 &= 0 & \\
&\Longleftrightarrow & 6\sigma + 6\sigma - 12 &= 0 & \quad |+12 \\
&\Longleftrightarrow & 12\sigma &= 12 & \quad |:12 \\
&\Longleftrightarrow & \sigma &= 1 &
\end{aligned}$$

Da die x_1-Komponente der Ebene F null ist, aber nur dort in der Gleichung von E der Parameter τ auftritt, bleibt dieser unbestimmt. Dafür ergibt sich ein konkreter Wert für σ. Setzt man $\varphi = \tau$ als neuen Parameter der Gerade und $\sigma = 1$ in die Gleichung der Ebene ein, ergibt sich die Gleichung der Schnittgeraden:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix}2{,}5\\0\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0{,}75\\2\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\0{,}75\\2\end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix}2{,}5\\0\\0\end{pmatrix}}} \quad \text{mit } \varphi \in \mathbb{R}$$

Nachweis das P und Q auf s liegen
Es soll weiterhin gezeigt werden, dass die Punkte P und Q auf der Schnittgeraden s liegen. Dafür wird für P der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ mit der Gleichung der Geraden gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}75 \\ 2 \end{pmatrix} + \varphi \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0{,}75 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich zeilenweise drei Gleichungen. Da aber nur die x_1-Komponente des Richtungsvektors von null verschieden ist, ergibt sich aus der ersten Zeile die einzige Gleichung für φ. Da $2{,}5\varphi = 2{,}5$ ist, kann direkt abgelesen dass $\varphi = 1$ gelten muss. Da die anderen Zeilen direkt unabhängig von φ erfüllt sind, sind alle Zeilen erfüllt und der Punkt liegt auf der Geraden.

Analog kann für Punkt Q vorgegangen werden. Da der Ortsvektor der Geraden s jedoch genau dem Vektor $\overrightarrow{OQ}$ entspricht, muss Q für $\varphi = 0$ auch auf der Geraden s liegen.

1.4 **Volumen des Zeltes**
Das Zelt entspricht als geometrischer Körper betrachtet einem Prisma mit dreieckiger Grundfläche ABP und Höhe ℓ. Zunächst wird der Flächeninhalt des Dreiecks ABP ermittelt:

$$A_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 2 = 1{,}5\,[m^2]$$

Daraus ergibt sich das Volumen des Zeltes:

$$V = A_{ABP} \cdot \ell = 1{,}5 \cdot 2{,}5 = \underline{\underline{3{,}75}}\,[m^3]$$

1.5 **Winkel zwischen Horizontale und Zeltwand**
Der Winkel α zwischen der x_1x_2-Ebene und einer der Zeltwände (aufgrund der Symmetrie des Zeltes haben beide Zeltwände den gleichen Winkel zur Horizontalen) entspricht dem Winkel, den die Vektoren $\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{DQ}$ einschließen. Dafür gilt:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{DC} \circ \overrightarrow{DQ}|}{|\overrightarrow{DC}||\overrightarrow{DQ}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}75 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{1{,}5^2} \cdot \sqrt{0{,}75^2 + 2^2}} = \frac{1{,}125}{\sqrt{2{,}25 \cdot 4{,}5625}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha \approx 69{,}44^\circ}}$$

1.6 **Abstand Punkt P zu Koordinatenursprung**
Der Abstand ergibt sich aus dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{OP}$:

$$d_P = |\overrightarrow{OP}| = \left|\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0{,}75 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2{,}5^2 + 0{,}75^2 + 2^2} = \underline{\underline{\sqrt{10{,}8125}}}\,[m]$$

2 Im Folgenden werden jeweils Werte für a, b und c gesucht, die die gegebenen Aussagen erfüllen:

a) Wenn die Gerade g in der Ebene F liegen soll, muss die Gleichung der Gerade g komponentenweise eingesetzt in F unabhängig von λ erfüllt sein. Zunächst wird dies für $\lambda = 0$ untersucht, indem man die Komponenten des Ortsvektors der Gerade in die Gleichung der Ebene einsetzt:

$$\begin{aligned} & & 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4 &= 0 & \\ &\iff & 3 \cdot (-2) - 0 + 2 \cdot a + 4 &= 0 & \\ &\iff & -6 + 2a + 4 &= 0 & \quad | + 2 \\ &\iff & 2a &= 2 & \quad | : 2 \\ &\iff & a &= 1 & \end{aligned}$$

Für $a = 1$ liegt also der Ortsvektor der Gerade g bereits in der Ebene. Weiterhin muss für $\lambda \neq 0$ die Gleichung erfüllt sein. Es wird nun die Gleichung der Gerade komponentenweise in die Gleichung der Ebene F eingesetzt:

$$\begin{aligned} & & 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4 &= 0 \\ &\iff & 3(-2 + \lambda \cdot b) - (0 + \lambda \cdot c) + 2(1 + \lambda) + 4 &= 0 \\ &\iff & -6 + 3\lambda b - \lambda c + 2 + 2\lambda + 4 &= 0 \\ &\iff & 3b\lambda - c\lambda + 2\lambda &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung soll für alle λ erfüllt sein. Da außerdem hier $\lambda \neq 0$ sein soll, kann die Gleichung durch λ dividiert werden:

$$\begin{aligned} & & 3b\lambda - c\lambda + 2\lambda &= 0 & \quad | : \lambda \\ &\iff & 3b - c + 2 &= 0 & \quad | + c \\ &\iff & c &= 3b + 2 & \end{aligned}$$

Für $a = 1$ und alle $c = 3b + 2$ ist die Gleichung für alle λ erfüllt, sodass die Gerade g in der Ebene F liegt. Da genau eine Möglichkeit gesucht werden soll, wird nun $b = 1$ gesetzt, sodass sich $c = 3 \cdot 1 + 2 = 5$ ergibt. Für $\underline{\underline{a = 1}}$, $\underline{\underline{b = 1}}$ und $\underline{\underline{c = 5}}$ liegt die Gerade g in der Ebene F.

b) In Teilaufgabe a) wurde eine Gleichung der Gerade gefunden, die in der Ebene liegt. Dafür muss der Ortsvektor in der Ebene liegen und die Gerade außerdem parallel zu F verlaufen. Da auch in dieser Teilaufgabe die Gerade parallel zu F verlaufen soll, kann der Richtungsvektor aus a) übernommen werden. Somit ist auch hier $c = 3b + 2$ und es können wiederum die Werte $b = 1$ und $c = 5$ verwendet werden. Der Ortsvektor der Gerade darf nun aber nicht in der Ebene liegen, damit die Gerade **echt** parallel zur Ebene liegt. Aus a) ist bekannt, das der Ortsvektor für $a = 1$ in der Ebene liegt. Hier sind somit alle Werte außer $a = 1$ korrekt. Eine mögliche Lösung für die Werte sind also $\underline{\underline{a = 2}}$, $\underline{\underline{b = 1}}$ und $\underline{\underline{c = 5}}$, damit die Gerade echt parallel zur Ebene F liegt.

c) Der Normalenvektor $\vec{n}_F$ der Ebene F steht senkrecht auf der Ebene und kann aus der gegebenen Koordinatenform direkt abgelesen werden zu:

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da auch die Gerade hier senkrecht auf der Ebene stehen soll, muss der Richtungsvektor der Geraden ein Vielfaches des Normalenvektors der Ebene sein:

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = q \cdot \begin{pmatrix} b \\ c \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeilenweise ergeben sich drei Gleichungen. Da Zeile III weder b noch c als Unbekannte enthält, wird diese zuerst betrachtet:

$$\begin{aligned} & 2 = q \cdot 1 \\ \Longleftrightarrow \quad & q = 2 \end{aligned}$$

Dieser Wert wird in die Zeile I und II eingesetzt:

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & 3 = q \cdot b \\ \Longleftrightarrow \quad & 3 = 2b \qquad | : 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & b = 1{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad & -1 = q \cdot c \\ \Longleftrightarrow \quad & -1 = 2c \qquad | : 2 \\ \Longleftrightarrow \quad & c = -0{,}5 \end{aligned}$$

Für $b = 1{,}5$ und $c = -0{,}5$ verläuft die Gerade also senkrecht zur Ebene. Da dies durch den Richtungsvektor komplett festgelegt ist, spielen die Koordinaten des Ortsvektors der Geraden keine Rolle für die Erfüllung der Aussage. Es kann hier also $a \in \mathbb{R}$ frei gewählt werden. Eine mögliche Lösung, für die g senkrecht zur Ebene F verläuft, ist also $\underline{\underline{a = 1}}$, $\underline{\underline{b = 1{,}5}}$ und $\underline{\underline{c = -0{,}5}}$.