ÜBUNGSTEIL Analysis - FOS13 Technik

Aufgabe 1 - Kurvendiskussion: FOS13 MT 2012, AI 2
Themen: Extrempunkte, Stammfunktion

1 Gegeben ist weiter die Funktion $g\colon x \mapsto \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

1.1 Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der Extrempunkte des Graphen von g. $\left(\text{Teilergebnis: } g'(x) = \frac{2-e^x}{2e^x\sqrt{e^x-1}}\right)$ **7 BE**

1.2 Zeigen Sie, dass für $x > 0$ folgende Beziehung für $g(x)$ erfüllt ist: $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^x-1}} - g'(x)$, und ermitteln Sie damit eine Stammfunktion von g. **7 BE**

Lösungsvorschlag A1 Kurvendiskussion: FOS13 MT 2012, AI 2

1 Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x}$ mit $D_g = \mathbb{R}_0^+$

1.1 Mithilfe von Quotienten- und Kettenregel wird die erste Ableitung bestimmt.

Ermitteln der ersten Ableitung

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\sqrt{e^x - 1}}{e^x} \\
g'(x) &= \left[\frac{(\sqrt{e^x-1})' \cdot e^x - \sqrt{e^x-1} \cdot (e^x)'}{(e^x)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \left[\frac{(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} \cdot (e^x-1)' \cdot e^x - \sqrt{e^x-1} \cdot e^x}{(e^x)^2}\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} e^x \cdot \cancel{e^x} - \sqrt{e^x-1} \cdot \cancel{e^x}}{(e^x)^{\cancel{2}1}} && \text{(Anwendung und Kürzen)} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{e^x-1}} \cdot e^x - \sqrt{e^x-1}}{e^x} && \text{(Erweitern des Bruchs)} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{e^x-1}} \cdot e^x - \sqrt{e^x-1}}{e^x} \cdot \frac{2\sqrt{e^x-1}}{2\sqrt{e^x-1}} && \text{(Ausmultiplizieren)} \\
&= \frac{e^x - 2(e^x-1)}{2e^x\sqrt{e^x-1}} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{2 - e^x}{2e^x\sqrt{e^x-1}} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}
$$

Koordinaten und Art der Extrempunkte

Die Nullstellen der ersten Ableitung sind die möglichen Extremstellen der Funktion $g(x)$. Für die Nullstellen der ersten Ableitung muss der Zählerterm der ersten Ableitung den Wert Null annehmen. Es gilt also

$$g'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 - e^x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2 = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln(2)$$

Das Vorzeichen des Zählerterms entscheidet außerdem über das Vorzeichen der Ableitung. Mit der eben bestimmten Nullstelle des Zählerterms gilt dann:

$$
\begin{aligned}
x < \ln(2) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 - e^x > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g'(x) > 0 \\
x > \ln(2) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 - e^x < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g'(x) < 0
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs ist der Graph der Funktion also streng monoton steigend im Intervall $[0;\ \ln(2)]$ und streng monoton fallend in $[\ln(2);\ \infty[$. Somit liegt bei $x = \ln(2)$ ein Hochpunkt vor. Es wird noch der Funktionswert an dieser Stelle bestimmt.

$$g(\ln(2)) = \frac{\sqrt{e^{\ln(2)} - 1}}{e^{\ln(2)}} = \frac{\sqrt{2-1}}{2} = \frac{1}{2}$$

Damit existiert der Hochpunkt $\underline{\underline{HOP\left(\ln(2)\,\middle|\,\frac{1}{2}\right)}}$. Da der Graph der Funktion in $[0;\ln(2)]$ fällt und stetig ist, muss zusätzlich ein Randminimum bei $x = 0$ existieren.

$$g(0) = \frac{\sqrt{e^0 - 1}}{e^0} = \frac{\sqrt{0}}{1} = 0$$

Außerdem existiert also das Randminimum $\underline{\underline{TIP\,(0\,|\,0)}}$.

1.2 **Nachweis des Funktionsterms**

Die gegebene Funktionsdarstellung wird umgeformt.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{e^x-1}} - g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{e^x-1}} - \frac{2-e^x}{2e^x\sqrt{e^x-1}} = \frac{e^x}{2e^x\sqrt{e^x-1}} - \frac{2-e^x}{2e^x\sqrt{e^x-1}} = \frac{e^x-2+e^x}{2e^x\sqrt{e^x-1}}\\ &= \frac{e^x-1}{e^x\sqrt{e^x-1}} = \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x} = g(x)\end{aligned}$$

Ermitteln der Stammfunktion

Die angegebene Funktionsdarstellung von $g(x)$ kann für die Integration verwendet werden.

$$\int g(x)dx = \int \left(\frac{1}{2\sqrt{e^x-1}} - g'(x)\right) dx = \int \frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}dx - g(x)$$

Im Folgenden wird nur der Ausdruck betrachtet, der immer noch integralbehaftet ist und einzeln gelöst. Dafür wird eine Substitution $u = \sqrt{e^x - 1}$ vorgenommen. Damit gilt:

$$u = \sqrt{e^x-1} \quad \Longleftrightarrow \quad e^x = u^2 + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad dx = \frac{2u}{u^2+1}du$$

Dies wird in das bestehende Integral eingesetzt.

$$\int \frac{1}{2\sqrt{e^x-1}}dx = \int \frac{1}{2u} \cdot \frac{2u}{u^2+1}du = \int \frac{1}{u^2+1}du = \arctan(u) + C \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

Wird die Substitution die vorgenommen wurde, bei diesem Ergebnis rückgängig gemacht, so folgt:

$$\int \frac{1}{2\cdot\sqrt{e^x-1}}dx = \arctan(\sqrt{e^x-1}) + C$$

Damit lässt sich die Stammfunktion bestimmen.

$$G(x) = \int g(x)dx = \underline{\underline{\arctan(\sqrt{e^x-1}) - \frac{\sqrt{e^x-1}}{e^x} + C}}$$

Aufgabe 2 - Kurvendiskussion: FOS13 MT 2013, AII 1 - adaptiert
Themen: Nullstellen (Parameter), Extrempunkte, Monotonie, Grenzwert, Asymptote, Graphische Darstellung, Umkehrfunktion, Integral

1 Gegeben ist die Funktion $f_a: x \mapsto (x^2 - a^2) \cdot e^{-ax}$ mit der Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a und deren Anzahl jeweils in Abhängigkeit von a. **2 BE**

Für die folgenden Teilaufgaben gilt $\mathbf{a = 1}$.

1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_1.
(Zwischenergebnis: $f_1'(x) = (-x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x}$) **10 BE**

1.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_1(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Gleichung der Asymptote und die Abszissen der Extrempunkte des Graphen von f_1 an. Zeichnen Sie den Graphen von f_1 im Bereich $-1{,}5 \leq x \leq 6$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse ($1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$). **6 BE**

1.4 Begründen Sie, dass die Funktion $u: x \mapsto f_1(x)$, $D_u =]-\infty; 1-\sqrt{2}]$ umkehrbar ist.
Der Punkt $P'\,(\,?\,|-1)$ liegt auf dem Graphen von u^{-1}. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t' in P' an diesen Graphen. **5 BE**

1.5 Gegeben ist Integralfunktion $F: x \mapsto \int_1^x f_1(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_F = \mathbb{R}$ und dem Graphen G_F.

1.5.1 Ermitteln Sie die Art und die Abszissen der Extrempunkte sowie die Abszissen der Wendepunkt von G_F. Begründen Sie die Anzahl der Nullstellen von F. **7 BE**

1.5.2 Ermitteln Sie eine eine integralfreie Darstellung von F(x). Bestimmen Sie den Grenzwert von F(x) für $x \to +\infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis anhand von f_1.
(Teilergebnis: $F(x) = (-x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x} + 4e^{-1}$) **9 BE**

Lösungsvorschlag A2 Kurvendiskussion: FOS13 MT 2013, AII 1 - adaptiert

1 Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = (x^2 - a^2) \cdot e^{-a \cdot x}$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

1.1 Für die Nullstellen gilt

$$f_a(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x^2 - a^2) \cdot e^{-a \cdot x} = 0$$

Da der Ausdruck e^{-ax} nie den Wert Null annimmt, folgt:

$$f_a(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - a^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm a$$

Ist also $a \neq 0$, besitzt die Funktion zwei Nullstellen $\underline{\underline{x_1 = a}}$ und $\underline{\underline{x_2 = -a}}$.

Ist $a = 0$, besitzt die Funktion eine Nullstelle bei $\underline{\underline{x = 0}}$.

1.2 Zunächst wird mithilfe von Produkt- und Kettenregel die erste Ableitung gebildet.

Ermitteln der ersten Ableitung

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= (x^2 - 1) \cdot e^{-x} & \\
f_1'(x) &= \left[(x^2 - 1)' \cdot e^{-x} + (x^2 - 1) \cdot (e^{-x})'\right] & \text{(Ansatz Produktregel)} \\
&= \left[2x \cdot e^{-x} + (x^2 - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-x)'\right] & \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= 2x \cdot e^{-x} + (x^2 - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1) & \text{(Anwendung)} \\
&= 2x \cdot e^{-x} - (x^2 - 1) \cdot e^{-x} & \text{(Ausmultiplizieren)} \\
&= 2x \cdot e^{-x} - x^2 \cdot e^{-x} + 1 \cdot e^{-x} & \text{((}e^{-x}\text{) Ausklammern)} \\
&= (-x^2 + 2x + 1) \cdot e^{-x} & \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}$$

Monotonieverhalten und Abszissen und Art der Extrempunkte
Die Nullstellen der ersten Ableitung entsprechen möglichen Extremstellen der Funktion. Demnach gilt:

$$f_1'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0$$

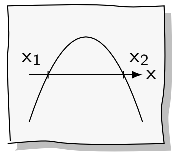
Mit der quadratischen Lösungsformel gilt dann:

$$\begin{aligned}
x_{1;2} &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2}
\end{aligned}$$
$$x_1 = 1 - \sqrt{2} \quad \text{oder} \quad x_2 = 1 + \sqrt{2}$$

Da der Faktor e^{-x} stets positive Werte annimmt, wird das Vorzeichen des Terms $(-x^2 + 2x + 1)$ und damit das Vorzeichen der ersten Ableitung betrachtet:

Beim Term $(-x^2+2x+1)$ handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel (siehe nebenstehende Skizze). Da das Vorzeichen der ersten Ableitung mit dem Vorzeichen von $(-x^2+3x+1)$ übereinstimmt, ist der Graph der Funktion f_1 in den Intervallen $\left]-\infty;\ 1-\sqrt{2}\right]$ und $\left[1+\sqrt{2};\ \infty\right[$ streng monoton fallend und im Intervall $\left[1-\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2}\right]$ streng monoton steigend.

Skizze



1.3 **Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge**

Es wird das Verhalten der Funktion $f_1(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge untersucht.

$$x \to -\infty:\ f_1(x) = \overbrace{(x^2-1)}^{\to\infty} \cdot \overbrace{e^{-x}}^{\to\infty} \to \infty$$

$$x \to \infty:\ f_1(x) = \overbrace{(x^2-1)}^{\to\infty} \cdot \overbrace{e^{-x}}^{\to 0} = \frac{\overbrace{x^2-1}^{\to\infty}}{\underbrace{e^x}_{\to\infty}} \to 0 \quad \text{(da e-Fkt. dominiert)}$$

Gleichung der Asymptote

Aus dem Grenzwertverhalten von $x \to \infty$ resultiert eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $\underline{\underline{y = 0}}$.

Abszissen der Extrempunkte

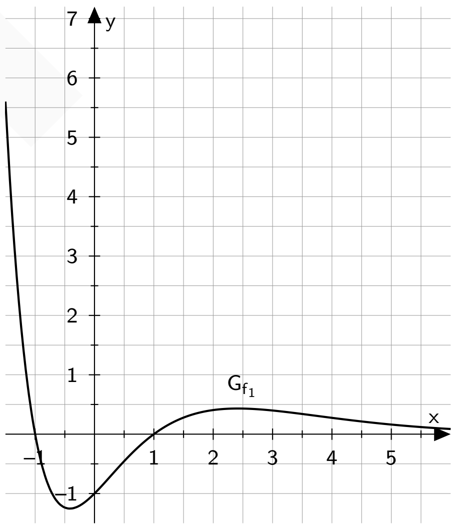
Der Tiefpunkt der Funktion $f_1(x)$ liegt bei $x_1 = 1-\sqrt{2}$ und der Hochpunkt bei $x_2 = 1+\sqrt{2}$.

Graphische Darstellung

Entsprechend der bisherigen Ergebnisse und weiterer Werte wird nun eine optionale Wertetabelle erstellt:

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}414$	0	1	$2{,}414$	4	6
$f_1(x)$	$5{,}6$	0	$-1{,}25$	-1	0	$0{,}43$	$0{,}27$	$0{,}09$

Damit lässt sich die Funktion im angegeben Bereich darstellen.



1.4 **Begründung der Umkehrbarkeit**

Die Funktion $f_1(x)$ ist auf $\left]-\infty;\, 1-\sqrt{2}\right]$ streng monoton fallend und damit umkehrbar.

Gleichung der Tangente

Es wird der Funktionswert der Funktion $u(x)$ an der Stelle $x = -1$ ermittelt.

$$u(-1) = f_1(-1) = ((-1)^2 - 1^2) \cdot e^{-1\cdot(-1)} = 0$$

Liegt der Punkt $P(-1\,|\,0)$ auf u so lauten die Koordinaten des Punktes P' auf u^{-1} $P'(0\,|\,-1)$. Außerdem wird der Wert der ersten Ableitung an dieser Stelle ermittelt:

$$u'(-1) = f_1'(-1) = (-1-2+1) \cdot e^1 = -2\,e$$

Damit ergibt sich die Steigung der gesuchten Tangente als

$$(u^{-1})'(0) = \frac{1}{u'(-1)} = -\frac{1}{2e}$$

Da der Punkt P' die Koordinaten $(0; -1)$ besitzt, verläuft die Tangente also bei $y = -1$ durch die y-Achse, wodurch direkt der Achsenabschnitt der Tangente gegeben ist. Damit ergibt sich die Gleichung der Tangente t':

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{2e} \cdot x - 1}}$$

1.5 Gegeben ist jetzt die Funktion $F(x) = \int_1^x f_1(t)dt$ mit $D_F = \mathbb{R}$.

1.5.1 Laut Angabe folgt: $F'(x) = f_1(x)$ und $F''(x) = f_1'(x)$.

Art uns Abszissen der Extrempunkte

Die Aussagen zu dieser Aufgabe lassen sich aus den Ergebnissen der letzten Teilaufgaben herleiten. Es gilt

$f_1 > 0$ für $x < -1$	G_F ist streng monoton steigend in $]-\infty; -1]$
$f_1 < 0$ für $-1 < x < 1$	G_F ist streng monoton fallend in $[-1; 1]$
$f_1 > 0$ für $1 < x$	G_F ist streng monoton steigend in $[1; \infty[$

Damit gibt es einen Hochpunkt bei $\underline{\underline{x = -1}}$ und einen Tiefpunkt bei $\underline{\underline{x = 1}}$.

Abszissen der Wendepunkte

Da auch $F''(x) = f_1'(x)$ gilt, entsprechen die Extremstellen von G_f den Wendestellen von G_F. Für den Graph der Funktion $F(x)$ liegen demnach Wendestellen bei $\underline{\underline{x = 1-\sqrt{2}}}$ und $\underline{\underline{x = 1+\sqrt{2}}}$ vor.

Anzahl der Nullstellen

Sind obere und untere Grenze des Integrals gleich, so folgt:

$$\int_1^1 f_1(t)dt = 0$$

Damit existiert also die Nullstelle $x_1 = 1$

Ist $x < 1$, gilt: $\int\limits_1^x f_1(t)dt = -\int\limits_x^1 f_1(t)dt$. Die Funktion besitzt somit ein negatives Vorzeichen. Aufgrund dieses Vorzeichenwechsels und des Monotonieverhaltens muss eine weitere Nullstelle vorliegen. Da die Funktion für $x > 1$ aber streng monoton steigt, kann hier keine weitere Nullstelle mehr liegen. Somit besitzt die Funktion also insgesamt genau zwei Nullstellen.

1.5.2 Integralfreie Darstellung

Um die integralfreie Form der Funktion zu gewinnen, wird mehrfach partiell integriert.
(Hinweis: Integral des Typs „Abräumer“; durch mehrmaliges partielles Integrieren verschwindet im Integral das Polynom als Faktor)

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int\limits_1^x f_1(t)dt = \int\limits_1^x (t^2-1)e^{-t}dt = \left[(t^2-1)\cdot(-e^{-t})\right]_1^x - \int\limits_1^x 2t\cdot(-e^{-t})dt \\
&= \left[-(t^2-1)e^{-t}\right]_1^x - \left([2t\cdot e^{-t}]_1^x - \int\limits_1^x 2\cdot e^{-t}dt\right) \\
&= \left[(1-t^2)e^{-t}\right]_1^x - [2t\cdot e^{-t}]_1^x + [-2e^{-t}]_1^x = \left[(1-t^2-2t-2)e^{-t}\right]_1^x \\
&= (-x^2-2x-1)e^{-x} - (1-1^2-2\cdot1-2)e^{-1} \\
&= (-x^2-2x-1)e^{-x} + 4e^{-1}
\end{aligned}$$

Grenzwert für $x \to +\infty$
Weiterhin wird das Verhalten der Funktion für $x \to \infty$ betrachtet.

$$x \to \infty:\ F(x) = ((-x^2-2x-1)e^{-x} + 4e^{-1}) = \left(4e^{-1} - \frac{\overbrace{x^2+2x+1}^{\to\infty}}{\underbrace{e^x}_{\to\infty}}\right) \to 4e^{-1} \quad \text{(da e-Fkt. dom.)}$$

Interpretation im Sachzusammenhang
Betrachtet man die Funktion $F(x)$ in ihrer integralhaltigen Form, so wird klar, dass dieser ermittelte Wert der endlichen Maßzahl der Fläche entspricht, die die Funktion $f_1(x)$ und die x-Achse von 1 bis ins Unendliche einschließen.

Aufgabe 3 - Kurvendiskussion: FOS13 MT 2015, AII 1 - adaptiert

Themen: Definitionsmenge (Parameter), Symmetrie (Parameter), Grenzwert (Parameter), Nullstellen (Parameter), Monotonie, Extrempunkt, Integral, Umkehrfunktion

1 Gegeben ist die Funktion $f_a: x \mapsto 2 \cdot \arctan\left(\frac{x^2 - a}{x^2 + a}\right)$ mit der in $\mathbb{R}$ maximalen Definitionsmenge D_{f_a} und $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

1.1 Bestimmen Sie D_{f_a} in Abhängigkeit von a, das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a und das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ für $x \to \pm\infty$. Berechnen Sie auch die Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a. **7 BE**

1.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_4 und die Art und die Koordinaten des Extrempunktes.
$\left(\text{Teilergebnis: } f_4'(x) = \frac{16x}{x^4 + 16}\right)$ **11 BE**

Gegeben ist weiter die Integralfunktion $g: x \mapsto \int\limits_0^x \frac{16t}{t^4 + 16}\, dt$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}$

1.3 Zeigen Sie durch Integration, dass sich $g(x)$ schreiben lässt in der Form $g(x) = 2 \cdot \arctan(\frac{x^2}{4})$. **5 BE**

1.4 Begründen Sie, dass sich die Funktionen f_4 und g nur um eine additive Konstante unterscheiden, und berechnen Sie diese. Geben Sie die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von g an und zeichnen Sie den Graphen im Bereich $-5 \leq x \leq 5$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte (1 LE = 1 cm; Platzbedarf für 1.5: $y \leq -5$). **7 BE**

1.5 Begründen Sie, dass die Funktion g für $x \leq 0$ umkehrbar ist, und ermitteln Sie einen Term der zugehörigen Umkehrfunktion h. Geben Sie auch die Definitionsmenge von h an. Zeichnen Sie den Graph von h in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1.4 ein. **7 BE**

Lösungsvorschlag A3 Kurvendiskussion: FOS13 MT 2015, AII 1 - adaptiert

1 Gegeben ist $f_a(x) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{x^2 - a}{x^2 + a}\right)$ mit der in $\mathbb{R}$ maximalen Definitionsmenge D_{f_a} und $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

1.1 **Definitionsmenge**

Einschränkungen in der Definitionsmenge entstehen, da der Nennerterm nie den Wert null annehmen darf. Für die Nullstellen des Nennerterms gilt:

$$x^2 + a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = -a \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-a}$$

Für $a > 0$ tritt der Fall $\sqrt{-a}$ nicht auf. Es gibt keine Einschränkung der Definitionsmenge und es gilt $\underline{\underline{D_{f_a} = \mathbb{R}}}$.

Für $a < 0$ müssen die beiden obigen Fälle ausgeschlossen werden, so dass gilt: $\underline{\underline{D_{f_a} = \mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{-a}\}}}$.

Symmetrieverhalten

Alle x, die in der Funktionsgleichung vorhanden sind, stehen im Quadrat. Dies bedeutet Achsensymmetrie zur y-Achse. Für Achsensymmetrie zur y-Achse gilt allgemein $f(-x) = f(x)$. Hier (für $x \in D_{f_a}$):

$$f_a(-x) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{(-x)^2 - a}{(-x)^2 + a}\right) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{x^2 - a}{x^2 + a}\right) = f_a(x)$$

Es liegt Symmetrie zur y-Achse vor.

Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ für $x \to \pm\infty$

Für das Verhalten der Funktionswerte im Unendlichen wird zunächst das Argument des Arcustangens betrachtet:

$$x \to \pm\infty: \frac{\overbrace{\mathbf{1}x^2 - a}^{\to\infty}}{\underbrace{\mathbf{1}x^2 + a}_{\to\infty}} \to \frac{1}{1} = 1 \quad \text{(da ZG=NG)}$$

Entsprechend gilt für die Funktion:

$$x \to \pm\infty: f_a(x) = 2 \cdot \arctan\left(\underbrace{\frac{x^2 - a}{x^2 + a}}_{\to 1}\right) \to 2 \cdot \arctan(1) = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Nullstellen

Für die Nullstellen der Arcustangensfunktion gilt $\arctan(0) = 0$. Für die Nullstellen der Funktion gilt also:

$$2 \cdot \arctan\left(\frac{x^2 - a}{x^2 + a}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2 - a}{x^2 + a} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{1;2} = \pm\sqrt{a}$$

Entsprechend der Betrachtung bei der Definitionsmenge muss unterschieden werden:

Für $a > 0$ besitzt die Funktion zwei Nullstellen bei $\underline{\underline{x_{1,2} = \pm\sqrt{a}}}$.

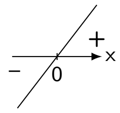
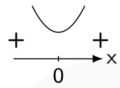
Für $a < 0$ gibt es keine Lösung für $x = \pm\sqrt{a}$. Die Funktion hat keine Nullstellen.

1.2 Zunächst wird mithilfe von Ketten- und Quotientenregel die erste Ableitung gebildet.

Ermitteln der ersten Ableitung

$$
\begin{aligned}
f_4(x) &= 2 \cdot \arctan\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right) \\
f_4'(x) &= 2 \cdot \left[\frac{1}{1+\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)^2} \cdot \left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= 2 \cdot \left[\frac{1}{1+\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)^2} \cdot \frac{(x^2-4)' \cdot (x^2+4) - (x^2-4) \cdot (x^2+4)'}{(x^2+4)^2}\right] && \text{(Ansatz Quot.regel)} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x^2-4}{x^2+4}\right)^2} \cdot \frac{2x \cdot (x^2+4) - (x^2-4) \cdot 2x}{(x^2+4)^2} && \text{(Anwendung)} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{1+\frac{(x^2-4)^2}{(x^2+4)^2}} \cdot \frac{2x \cdot (x^2+4) - 2x \cdot (x^2-4)}{(x^2+4)^2} && \text{(Hauptnenner)} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{\frac{(x^2+4)^2+(x^2-4)^2}{(x^2+4)^2}} \cdot \frac{2x \cdot (x^2+4) - 2x \cdot (x^2-4)}{(x^2+4)^2} \\
&= 2 \cdot \frac{\cancel{(x^2+4)^2}}{(x^2+4)^2+(x^2-4)^2} \cdot \frac{2x \cdot (x^2+4) - 2x \cdot (x^2-4)}{\cancel{(x^2+4)^2}} && \text{(Kürzen)} \\
&= 2 \cdot \frac{2x \cdot (x^2+4) - 2x \cdot (x^2-4)}{(x^2+4)^2+(x^2-4)^2} && \text{(Ausmultiplizieren)} \\
&= 2 \cdot \frac{2x^3+8x-2x^3+8x}{x^4+8x^2+16+x^4-8x^2+16} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \cancel{2} \cdot \frac{16x}{\cancel{2}x^4+\cancel{2} \cdot 16} && \text{(Kürzen)} \\
&= \frac{16x}{x^4+16} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}
$$

Monotonieverhalten und Art und Koordinaten des Extrempunktes
Die Nullstelle der Ableitung entspricht einer möglichen Extremstelle der Funktion und ist hier gleich der Nullstelle des Zählerterms des Bruchs. Diese liegt bei $x = 0$. Es wird nun eine Vorzeichentabelle erstellt:

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x$	Skizzen
$f_4'(x)$-Zähler: $16x$	$-$	0	$+$	
$f_4'(x)$-Nenner: $x^4 + 16$	$+$	$+$	$+$	
$f_4'(x)$	$-$	0	$+$	
G_{f_4}	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	

Schließlich wird der Funktionswert bei $x = 0$ bestimmt:

$$f_4(0) = 2 \cdot \arctan\left(\frac{0-4}{0+4}\right) = 2 \cdot \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

Der Graph von f_4 ist streng monoton fallend im Intervall $]-\infty; 0]$ und streng monoton steigend in $[0; +\infty[$. Der Graph besitzt außerdem einen Tiefpunkt $\underline{\underline{\text{TIP}\left(0 \middle| -\frac{\pi}{2}\right)}}$.

1.3 Zum Lösen des Integrals wird folgende Substitution vorgenommen:

$$z = t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = 2t \quad \Longleftrightarrow \quad dz = 2tdt$$

Das Integral kann zunächst unbestimmt gelöst werden:

$$\begin{aligned}\int \frac{16t}{t^4+16}dt &= \int \frac{8}{z^2+16}dz = \int 8 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{(\frac{z}{4})^2+1}dz \\ &= \frac{8}{16} \cdot 4 \cdot \arctan\left(\frac{z}{4}\right) + C = 2 \cdot \arctan\left(\frac{t^2}{4}\right) + C\end{aligned}$$

Dabei ist $C \in \mathbb{R}$. Die Konstante entfällt in der folgenden Rechnung, da bestimmt integriert wird:

$$\begin{aligned}g(x) &= \int_0^x \frac{16t}{t^4+16}dt \\ &= \left[2 \cdot \arctan\left(\frac{t^2}{4}\right)\right]_0^x \\ &= 2 \cdot \arctan\left(\frac{x^2}{4}\right) - 2 \cdot \arctan\left(\frac{0^2}{4}\right) \\ &= \underline{\underline{2 \cdot \arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)}}\end{aligned}$$

1.4 **Nachweis der Relation zwischen f_4 und g**

Um zu prüfen, dass die beiden Funktionen sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, betrachtet man die erste Ableitung der beiden Funktionen:

$$
\begin{aligned}
f_4'(x) &= \frac{4\cdot 4x}{x^4+4^2} = \frac{16x}{x^4+16} \\
g'(x) &= \left[2\cdot\frac{1}{1+(\frac{x^2}{4})^2}\cdot\left(\frac{x^2}{4}\right)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= \cancel{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^4}{16}}\cdot\frac{x}{\cancel{2}} && \text{(Anwendung und Kürzen)} \\
&= \frac{1}{\frac{16+x^4}{16}}\cdot x && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{16x}{x^4+16}
\end{aligned}
$$

Die Ableitungen beider Funktionen stimmen überein. Beide Funktionsgraphen haben also den gleichen Verlauf, können aber nach oben oder unten gegeneinander verschoben sein. Um diese additive Konstante C zu bestimmen, wird der Wert beider Funktionen an der Stelle $x = 0$ gleichgesetzt (mit $C \in \mathbb{R}$):

$$
\begin{aligned}
& & g(0) &= f_4(0) + C \\
&\iff & 2\cdot\arctan\left(\frac{0^2}{4}\right) &= 2\cdot\arctan\left(\frac{0^2-4}{0^2+4}\right) + C \\
&\iff & 2\cdot 0 &= 2\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) + C \\
&\iff & 0 &= -\frac{\pi}{2} + C && \left|+\frac{\pi}{2}\right. \\
&\iff & C &= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

Koordinaten des Extrempunktes

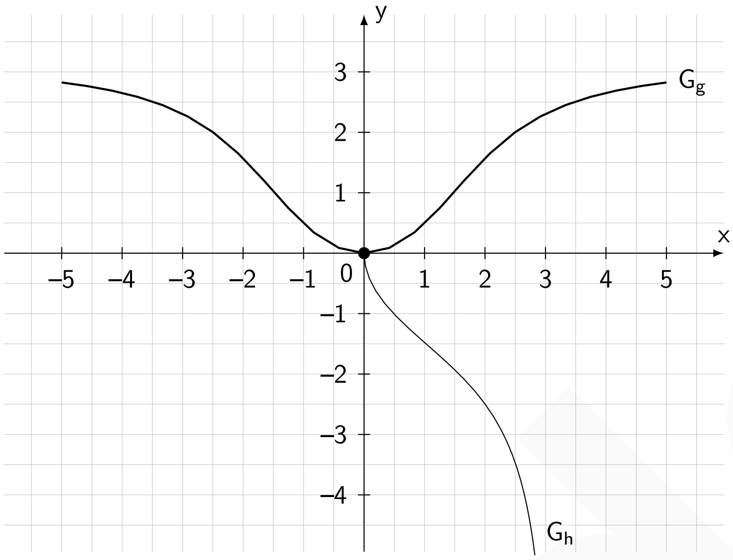
Die Funktionswerte von g(x) entsprechen denen von f(x) plus der Konstante $C = \frac{\pi}{2}$. Entsprechend hat der Graph von g(x) einen Tiefpunkt TIP $\left(0 \middle| -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$, also $\underline{\underline{\text{TIP}\,(0\,|\,0)}}$.

Graphische Darstellung

Da der Graph symmetrisch verläuft, genügt es, sich eine Wertetabelle mit positiven Werten für x zu erstellen:

x	0	1	2	3	4	5
g(x)	0	0,49	1,57	2,31	2,65	2,82

Damit kann die grafische Darstellung erfolgen:



1.5 **Nachweis der Umkehrbarkeit**

Mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe 1.4 folgt, dass der Graph von g für $x \leq 0$ streng monoton fallend und somit umkehrbar ist.

Term der Umkehrfunktion

Den Term der Umkehrfunktion erhält man, indem man in der Funktionsgleichung von g die Variablen x und y vertauscht und wieder nach y umformt:

$$
\begin{aligned}
&& x &= 2 \cdot \arctan\left(\frac{y^2}{4}\right) && \mid :2 \\
\Longleftrightarrow && \frac{x}{2} &= \arctan\left(\frac{y^2}{4}\right) && \mid \tan(\ ) \\
\Longleftrightarrow && \tan\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{y^2}{4} && \mid \cdot 4 \\
\Longleftrightarrow && 4\tan\left(\frac{x}{2}\right) &= y^2 && \mid \sqrt{\ } \\
\Longleftrightarrow && y &= \pm 2\sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

Da aber für g die Bedingung $x \leq 0$ erfüllt sein soll, muss für die Umkehrfunktion $y \leq 0$ gelten und es entfällt die Lösung mit positivem Vorzeichen. Es gilt:

$$\underline{\underline{h(x) = -2\sqrt{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}}}$$

Definitionsmenge

Die Definitionsmenge von h entspricht der Wertemenge der Funktion g:

$$D_h = \underline{\underline{W_g = [0;\ \pi[}}$$

Die grafische Darstellung der Funktion ist mit in der Grafik von Teilaufgabe 1.4 enthalten.

Aufgabe 4 - Kurvendiskussion: FOS13 MT 2015, AI 2 - adaptiert
Themen: Asymptoten, Extrempunkt, Wertemenge, Integral, Wendepunkt

1 Gegeben ist nun die Funktion $g\colon x \mapsto= \dfrac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}$ mit der Definitionsmenge $D_g =]0; +\infty[$.

1.1 Bestimmen Sie die Gleichungen der Asymptoten und die Art und die Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von g und geben Sie die Wertemenge von g an.
$\left(\text{mögliches Teilergebnis: } g'(x) = \frac{2-\ln(x)}{4x\cdot\sqrt{x}}\right)$ **11 BE**

1.2 Gegeben ist weiter die Integralfunktion G durch $G(x) = \int\limits_1^x g(t)dt$ mit der Definitionsmenge $D_G = D_g$.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von G. **7 BE**

Die weitere Aufgabe 1.3 ist nicht mehr relevant.

Lösungsvorschlag A4 Kurvendiskussion: FOS13 MT 2015, AI 2 - adaptiert

1.0 Gegeben ist nun die Funktion $g\colon x \mapsto = \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}}$ mit der Definitionsmenge $D_g =]0;\, +\infty[$.

1.1 **Gleichungen der Asymptoten**
Zur Bestimmung der Asymptoten wird das Verhalten der Funktion an den Rändern der Definitionsmenge untersucht. Linker Rand:

$$x \to 0^+ \colon g(x) = \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to -\infty}}{\underbrace{2\sqrt{x}}_{\to 0^+}} \to -\infty$$

Es existiert eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $\underline{\underline{x = 0}}$. Weiterhin wird das Verhalten am rechten Rand untersucht:

$$x \to \infty \colon g(x) = \frac{\overbrace{\ln(x)}^{\to \infty}}{\underbrace{2\sqrt{x}}_{\to \infty}} \to 0 \quad \text{(da ln-Fkt. unterliegt)}$$

Damit liegt außerdem eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $\underline{\underline{y = 0}}$ vor.

Ermitteln der ersten Ableitung
Um Aussagen über die Extrempunkte zu treffen wird mithilfe der Quotientenregel die erste Ableitung gebildet.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\ln(x)}{2\sqrt{x}} \\
g'(x) &= \left[\frac{(\ln(x))' \cdot 2\sqrt{x} - \ln(x) \cdot (2\sqrt{x})'}{(2\sqrt{x})^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \frac{\frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{x} - \ln(x) \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} && \text{(Anwendung Quotientenregel)} \\
&= \frac{\frac{2\sqrt{x}}{x} - \ln(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} && \text{(Erweitern mit } (\sqrt{x})\text{)} \\
&= \frac{\frac{2\sqrt{x}}{x} - \ln(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{2 - \ln(x)}{4x \cdot \sqrt{x}} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}$$

Art und Koordinaten des Extrempunktes
Die Nullstellen der Ableitung entsprechen den möglichen Extremstellen der Funktion und liegen hier bei den Nullstellen des Zählerterms der ersten Ableitung. Es gilt:

$$g(x) = 0$$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \qquad 2-\ln(x) &= 0 \qquad && |+\ln(x)\\
\Longleftrightarrow \qquad 2 &= \ln(x) && |\exp(\ )\\
\Longleftrightarrow \qquad e^2 &= x
\end{aligned}
$$

Da der Nennerterm der ersten Ableitung für alle $x \in D_g$ positiv ist, gilt:

$$
\begin{aligned}
0 < x < e^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2-\ln(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g'(x) > 0\\
x > e^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2-\ln(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g'(x) < 0
\end{aligned}
$$

Der Graph von g ist also streng monoton steigend in $]0;\, e^2]$ und streng monoton fallend in $[e^2;\, \infty[$ und besitzt somit einen Hochpunkt bei $x = e^2$ mit dem Funktionswert:

$$
g(e^2) = \frac{\ln(e^2)}{2\sqrt{e^2}} = \frac{2}{2e} = \frac{1}{e}
$$

Die Koordinaten des Hochpunkts lauten $\underline{\underline{HOP\left(e^2 \,\middle|\, \frac{1}{e}\right)}}$.

Wertemenge

Aus dem Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge, dem Monotonieverhalten und dem Funktionswert des Hochpunktes ergibt sich außerdem die Wertemenge $\underline{\underline{W_g = \left]-\infty;\, \frac{1}{e}\right]}}$.

1.2 Die Extremstellen von g sind die Wendestellen von G. Aus den Ergebnissen von Teilaufgabe 2.1 ist bekannt, dass der Graph von g bei $x = e^2$ eine Extremstellen hat. Demnach hat der Graph von G bei $x = e^2$ eine Wendestelle. Der Funktionswert an dieser Stelle wird mittels partieller Integration ermittelt:

$$
\begin{aligned}
G(e^2) &= \int_1^{e^2} g(t)dt = \int_1^{e^2} \frac{\ln(t)}{2\sqrt{t}}dt = \int_1^{e^2} \ln(t)\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}dt\\
&= \left[\ln(t)\cdot\sqrt{t}\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{t}\cdot\sqrt{t}dt = \left[\ln(t)\cdot\sqrt{t}\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{t}}dt = \left[\ln(t)\cdot\sqrt{t}\right]_1^{e^2} - \left[2\sqrt{t}\right]_1^{e^2}\\
&= \ln(e^2)\cdot\sqrt{e^2} - \ln(1)\cdot\sqrt{1} - \left(2\sqrt{e^2} - 2\sqrt{1}\right)\\
&= 2e - 0 - (2e-2)\\
&= 2
\end{aligned}
$$

Der Wendepunkt hat die Koordinaten $\underline{\underline{WEP\,(e^2 \,|\, 2)}}$.

Aufgabe 5 - Kurvendiskussion: FOS13 MT 2016, AI 1
Themen: Monotonie, Extrempunkt, Wertemenge, Wendepunkt, Wendetangente, Graphische Darstellung, Fläche, Umkehrfunktion

1 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f =]-2;\, 2]$.

1.1 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunkts des Graphen von f und die Wertemenge von f.
(mögliches Teilergebnis: $f'(x) = -0{,}5 \cdot (4-x^2)^{-0{,}5}$) **6 BE**

1.2 Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von f sowie die Gleichung der Wendetangente w. Zeichnen Sie den Graphen von f und die Wendetangente auch unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem
($1\,\text{LE} = 2\,\text{cm}$; Platzbedarf für 1.4: $-2 \leq y \leq 2$). **8 BE**

1.3 Der Graph von f und die Koordinatenachsen schließen im I. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche. **6 BE**

1.4 Begründen Sie, dass f umkehrbar ist, und ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} im Schnittpunkt dieses Graphen mit der x – Achse. Zeichnen Sie den Graphen von f^{-1} in das Koordinatensystem aus Aufgabe 1.2. **5 BE**

Lösungsvorschlag A5 Kurvendiskussion: FOS13 MT 2016, AI 1

1 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f =]-2;\, 2]$.

1.1 Mithilfe der Ketten- und Quotientenregel wird zunächst die erste Ableitung der Funktion berechnet.

Ermitteln der ersten Ableitung

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) \\
f'(x) &= \left[\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= \left[\frac{1}{1+\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}} \cdot \left(\frac{2-x}{2+x}\right)'\right] && \text{(Erneut Kettenregel)} \\
&= \left[\frac{1}{1+\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \cdot \frac{(2-x)' \cdot (2+x) - (2-x) \cdot (2+x)'}{(2+x)^2}\right] && \text{(Ansatz Quot.regel)} \\
&= \frac{1}{1+\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \cdot \frac{-1 \cdot (2+x) - (2-x) \cdot 1}{(2+x)^2} && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{1}{1+\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \cdot \frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2} && \text{(Hauptnenner)} \\
&= \frac{1}{\frac{2+x+2-x}{2+x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \cdot \frac{-4}{(2+x)^2} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= -\frac{\cancel{2+x}}{\cancel{8}^{2}} \cdot \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \cdot \frac{\cancel{4}^{1}}{(2+x)^{\cancel{2}1}} && \text{(Kürzen)} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} \cdot \frac{1}{2+x} && \text{(Wurzel kürzen)} \\
&= -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{(2+x)\cdot(2-x)}} && \text{(3. binom. Formel)} \\
&= -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{4-x^2}} \qquad D_{f'} =]-2;\, 2[&& \text{(Zur Kontrolle angeg.)}
\end{aligned}
$$

Monotonieverhalten und Art und Koordinaten des Extrempunkts
Da die Wurzel nur aus positiven Zahlen gezogen werden darf, sind sowohl Zähler- als auch Nennerterm der ersten Ableitung für alle x positiv. Da der Bruch ein negatives Vorzeichen besitzt, ist $f'(x) < 0$ für alle x aus D_f'. Demnach ist G_f streng monoton fallend in $]-2;\, 2]$. Der Extremwert liegt somit auf dem Rand. Da $x = -2$ außerhalb von D_f liegt, und der Graph streng monoton

fällt, liegt ein Randminimum bei $x = 2$:

$$f(2) = \arctan\left(\sqrt{\frac{2-2}{2+2}}\right) = \arctan(0) = 0$$

Die Koordinaten des Tiefpunkts lauten also $\underline{\underline{\text{TIP}\,(2\,|\,0)}}$.

Wertemenge
Beim ermittelten Randminimum handelt es sich gleichzeitig um die untere Grenze des Wertebereichs. Um die obere Grenze zu bestimmen muss das Verhalten am anderen Rand von D_f betrachtet werden:

$$x \to -2^+: f(x) \quad \Rightarrow \quad h \to 0^+: f(h-2) = \arctan\left(\frac{2-(h-2)}{2+(h-2)}\right) = \arctan\underbrace{\left(\frac{4-h}{h}\right)}_{\to\infty} \to \frac{\pi}{2}$$

Der Wertebereich der Funktion lautet somit $\underline{\underline{W_f = \left[0; \tfrac{\pi}{2}\right[}}$.

1.2 **Ermitteln der zweiten Ableitung**
Es wird die zweite Ableitung der Funktion berechnet. Dazu wird die erste Ableitung zunächst in eine andere Form gebracht. Mithilfe der Kettenregel kann daraus die zweite Ableitung bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= \left[-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(4-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(4-x^2)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\ &= \frac{1}{4}\cdot(4-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x) && \text{(Anwendung Kettenregel)} \\ &= -\frac{x}{2\cdot\sqrt{(4-x^2)^3}} \end{aligned}$$

Koordinaten des Wendepunktes
Die Nullstelle der zweiten Ableitung entspricht der möglichen Wendestelle der Funktion:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \iff \quad -\frac{x}{2\cdot\sqrt{(4-x^2)^3}} &= 0 \\ \iff \quad x &= 0 \end{aligned}$$

Da der Nennerterm der zweiten Ableitung stets positiv ist, liegt bei $x = 0$ ein Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung vor, es handelt sich also tatsächlich um eine Wendestelle von $f(x)$ mit folgendem Funktionswert:

$$f(0) = \arctan\left(\sqrt{\frac{2-0}{2+0}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

Der Wendepunkt hat somit die Koordinaten $\underline{\underline{WEP\left(0\,\middle|\,\frac{\pi}{4}\right)}}$.

Gleichung der Wendetangente

Da der Wendepunkt auf der y-Achse liegt, entspricht der Funktionswert dem y-Achsenabschnitt $n = \frac{\pi}{4}$ der Wendetangente. Mithilfe der ersten Ableitung kann außerdem die Steigung bei $x = 0$ ermittelt werden:

$$f'(0) = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{4-0^2}} = -\frac{1}{2\cdot 2} = -\frac{1}{4}$$

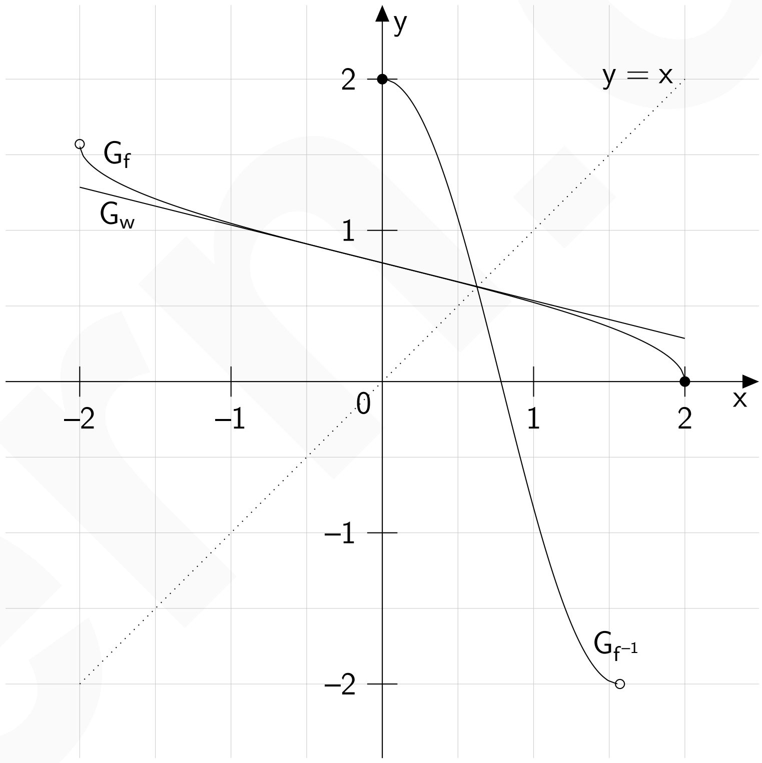
Die Gleichung der Wendetangente w lautet $\underline{\underline{y = -\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{4}}}$.

Graphische Darstellung

Für die grafische Darstellung werden neben den bereits bekannten Punkten noch weitere Funktionswerte berechnet:

x	−1,9	−1,5	−0,5	0	0,5	1,5	2
f(x)	1,41	1,21	0,91	0,79	0,66	0,36	0

Grafische Darstellung:



1.3 Die Integralgrenzen können aus der grafischen Darstellung zu $x = 0$ und $x = 2$ abgelesen werden, also gilt:

$$A = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) dx = \int_0^2 1\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) dx$$

An dieser Stelle wird partiell integriert, um das Integral zu lösen, dabei gilt:
(Hinweis: Integral des Typs „Einser"; für die partielle Integration wird die Funktion mit 1 mulitpliziert)

$$u = \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) \qquad u' = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}$$
$$v' = 1 \qquad v = x$$

Damit gilt für das Integral:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^2 1\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)dx \\
&= \left[x\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)\right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}dx \\
&= 2\cdot\arctan(0) - 0\cdot\arctan(1) + \int_0^2 \frac{x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}dx \\
&= 0 - 0 + \int_0^2 \frac{x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}dx
\end{aligned}$$

Um dieses Integral zu lösen wird eine Substitution verwendet:

$$z = 4 - x^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{dx} = -2x \quad\Longleftrightarrow\quad dx = -\frac{dz}{2x}$$

Setzt man diese Substitution ein, kann das Integral berechnet werden. Dabei wird zunächst unbestimmt integriert, dann rücksubstituiert und schließlich werden die Grenzen eingesetzt:

$$\int \frac{x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}dx = \int \frac{x}{2\cdot\sqrt{z}}\cdot\left(-\frac{dz}{2x}\right) = -\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sqrt{z}}dz = -\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{z} = -\frac{1}{2}\sqrt{z}$$

Rücksubstitution:

$$\int \frac{x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$$

Damit gilt für die Fläche:

$$A = \int_0^2 \frac{x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}dx = \left[-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{2}\sqrt{4-2^2} - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{4-0^2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{4} = \underline{\underline{1\,[FE]}}$$

1.4 **Begründung der Umkehrbarkeit**

Da der Graph G_f streng monoton fallend ist, ist die Funktion f umkehrbar.

Gleichung der Tangente

Die Tangente w ist Tangente an G_f im Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse. Daraus lassen sich einige Aussagen zur gesuchten Tangente treffen, da diese eine Tangente an $G_{f^{-1}}$ im Schnittpunkt mit der x-Achse ist (also Umkehrfunktion von w). Die Nullstelle der gesuchten Tangente liegt somit bei $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Für ihren Anstieg gilt:

$$m = \frac{1}{m_w} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4$$

Somit gilt für die Gleichung der gesuchten Tangente w^{-1}:

$$y = -4 \cdot (x - x_0) = -4 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{-4x + \pi}}$$

Für die grafische Darstellung wird der Graph G_f an der Gerade $y = x$ gespiegelt (siehe Teilaufgabe 1.2). Im Vergleich zur Wertetabelle von G_f werden somit für $G_{f^{-1}}$ jeweils die Werte von x und die zugehörigen Funktionswerte getauscht.

Aufgabe 6 - Kurvendiskussion: FOS13 MT 2016, AII 1 und 2 - adaptiert

Themen: Nullstelle, Grenzwert, Asymptoten, Monotonie, Graphische Darstellung, Fläche, Umkehrfunktion

1 Gegeben ist die Funktion $f\colon x \mapsto f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-3)}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 3\}$.

1.1 Geben Sie die Nullstelle von f an. (Nicht mehr relevant: Zeigen Sie, dass der Graph von f symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = 1$ ist.) **4 BE**

1.2 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f an. **6 BE**

1.3 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f.
(mögliches Teilergebnis: $f'(x) = -8(x-1)\cdot[(x+1)(x-3)]^{-2}$) **5 BE**

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von f für $-7 \leq x \leq 7$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse. Tragen Sie auch alle Asymptoten ein ($1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$). **4 BE**

1.5 Der Graph von f schließt mit der x – Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 4$ und $x = 6$ eine Fläche ein. Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen. **6 BE**

1.6 Begründen Sie, dass die Funktion g mit $g(x) = f(x)$ und $D_g =]3; +\infty[$ umkehrbar ist. Bestimmen Sie den Term der Umkehrfunktion g^{-1}, deren Definitionsmenge sowie die Steigung des Graphen von g^{-1} an der Stelle $x = \dfrac{4}{3}$. **7 BE**

2 Gegeben ist weiter die Funktion $k\colon x \mapsto \arctan(f(x))$ mit der Funktion f aus Aufgabe 1 und $D_k = D_f$.

2.1 Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte $k(x)$ für $x \to \pm\infty$ und für $x \to 3$ sowie die Gleichung der Asymptote des Graphen von k. **4 BE**

2.2 Bestimmen Sie für den Graphen von k das Monotonieverhalten. **3 BE**

Lösungsvorschlag A6 Kurvendiskussion: FOS13 MT 2016, AII 1 und 2 - adaptiert

1 Betrachtet wird die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)(x-3)}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 3\}$.

1.1 **Nullstelle**

Die Nullstelle der Funktion entspricht der Nullstelle des Zählerterms. Für diese gilt:

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x-1=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=1$$

Die Funktion $f(x)$ besitzt demnach bei $\underline{\underline{x=1}}$ eine doppelte (da $x-1$ quadriert vorliegt) Nullstelle.

1.2 **Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge**

Die Ränder der Definitionsmenge liegen bei $\pm\infty$, sowie bei -1 und 3. Da die Funktion achsensymmetrisch zu $x = 1$ ist, stimmen die Grenzwertbetrachtungen für $x \to -1$ und $x \to 3$ sowie $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$ überein. Betrachtet wird zunächst der Grenzwert für $x \to -1$ bzw. $x \to 3$:

$x \to 3^+: f(x)$ (identisches Ergebnis wie $x \to -1^-: f(x)$)

$$\Rightarrow \quad h \to 0^+: f(h+3) = \frac{(h+3-1)^2}{(h+3+1)(h+3-3)} = \frac{\overbrace{h^2+4h+4}^{\to 4}}{\underbrace{(h+4)h}_{\to 0^+}} \to +\infty$$

$x \to 3^-: f(x)$ (identisches Ergebnis wie $x \to -1^+: f(x)$)

$$\Rightarrow h \to 0^-: f(h+3) = \frac{(h+3-1)^2}{(h+3+1)(h+3-3)} = \frac{\overbrace{h^2+4h+4}^{\to 4}}{\underbrace{(h+4)h}_{\to 0^-}} \to -\infty$$

Weiterhin gilt:

$$x \to \pm\infty: f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-3)} = \frac{\mathbf{1}x^2-2x+1}{\mathbf{1}x^2-2x-3} \to \frac{1}{1} = 1 \quad \text{(da ZG=NG)}$$

Gleichungen aller Asymptoten

Aus dem Verhalten für $x \to 3$ und $x \to -1$ resultieren zwei senkrechte Asymptoten mit den Gleichungen $\underline{\underline{x=-1}}$ und $\underline{\underline{x=3}}$. Aus dem Verhalten für $x \to \pm\infty$ folgt zudem eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $\underline{\underline{y=1}}$.

1.3 Um das Monotonieverhalten zu ermitteln, wird zunächst mithilfe der Quotientenregel die erste Ableitung bestimmt.

Ermitteln der ersten Ableitung

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-3)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3}$$

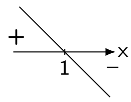
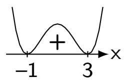
$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{(x^2-2x+1)'\cdot(x^2-2x-3)-(x^2-2x+1)\cdot(x^2-2x-3)'}{(x^2-2x-3)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)}\\
&= \frac{(2x^1-2)\cdot(x^2-2x-3)-(x^2-2x+1)\cdot(2x^1-2)}{(x^2-2x-3)^2} && \text{(Anwend. Quotientenregel)}\\
&= \frac{(2x-2)\cdot(x^2-2x-3)-(2x-2)\cdot(x^2-2x+1)}{(x^2-2x-3)^2} && \text{((2x − 2) Ausklammern)}\\
&= \frac{(2x-2)\cdot(x^2-2x-3-x^2+2x-1)}{(x^2-2x-3)^2} && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= \frac{(2x-2)\cdot(-4)}{(x^2-2x-3)^2} && \text{(Zusammenfassen)}\\
&= \frac{-8x+8}{(x^2-2x-3)^2} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}
$$

Monotonieverhalten

Die Nullstelle der ersten Ableitung entspricht einer möglichen Extremstelle und entspricht hier der Nullstelle des Zählerterms der ersten Ableitung:

$$f'(x)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad -8x+8=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x=1$$

Es wird nun eine Vorzeichentabelle betrachtet, um Aussagen über das Monotonieverhalten treffen zu können:

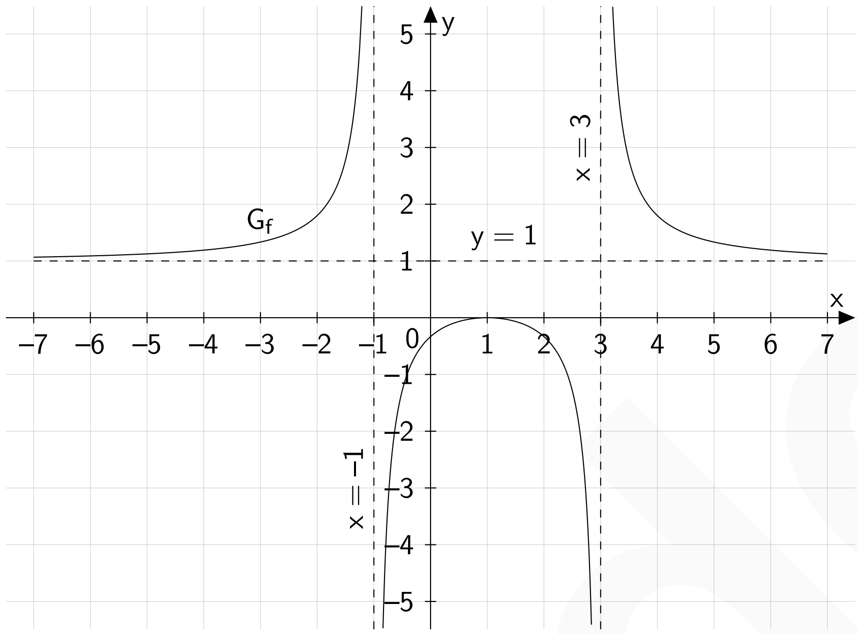
x	$x<-1$	$x=-1$	$-1<x<1$	$x=1$	$1<x<3$	$x=3$	$3<x$	Skizzen
$f'(x)$-Zähler: $-8x+8$	+	+	+	0	–	–	–	
$f'(x)$-Nenner: $(x^2-2x-3)^2$	+	0	+	+	+	0	+	
$f'(x)$	+	n. def.	+	0	–	n. def.	–	
G_f	↗	n. def.	↗	HOP	↘	n. def.	↘	

Somit ist der Graph von f in den Intervallen $]-\infty;\,-1[$ und $]-1;\,1]$ streng monoton steigend und im Intervall $[1;\,3[$ und $]3;\,\infty[$ streng monoton fallend.

1.4 Für die grafische Darstellung wird zunächst eine Wertetabelle erstellt. Dabei genügt es die Werte von −7 bis 1 zu bestimmen, da die Funktion symmetrisch zu $x=1$ ist:

x	−7	−3	−2	−1,3	−0,8	−0,3	0	1
$f(x)$	1,07	1,33	1,8	4,11	−4,26	−0,73	−0,33	0

Damit kann die grafische Darstellung des Funktionsgraphen und der Asymptoten erfolgen:



1.5 Um die Fläche zu berechnen muss integriert werden. Dazu wird zunächst die Funktionsgleichung umgeformt:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-3)} = \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-3} = \frac{x^2-2x-3+4}{x^2-2x-3}$$
$$= 1 + \frac{4}{x^2-2x-3} = 1 + \frac{4}{(x+1)(x-3)}$$

Für den Bruch muss weiterhin eine Partialbruchzerlegung vorgenommen werden, damit integriert werden kann:

$$\frac{4}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{-3A+B+x(A+B)}{(x+1)(x-3)}$$

Der Nennerterm ist im ersten Term und im vierten Term gleich. Demnach müssen auch die Zählerterme übereinstimmen. Es wird ein Koeffizientenvergleich durchgeführt (Koeffizienten vor x und ohne x müssen auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen):

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && 4 = -3A + B \\ &(\mathrm{II}) && 0 = A + B \end{aligned}$$

Aus Zeile (II) ergibt sich $A = -B$. Eingesetzt in Zeile (I) folgt:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && 4 = -3A + B && \\ &\iff && 4 = 3B + B && |:4 \\ &\iff && B = 1 && \end{aligned}$$

Es ist also $A = -1$ und $B = 1$. Damit gilt schließlich für die Funktionsgleichung:

$$f(x) = 1 + \frac{4}{(x+1)(x-3)} = 1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3}$$

In dieser Form kann schließlich der gesuchte Flächeninhalt mittels Integration bestimmt werden:

$$\begin{aligned} A &= \int_4^6 f(x)dx = \int_4^6 \left(1 - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3}\right) dx \\ &= [x - \ln|x+1| + \ln|x-3|]_4^6 \\ &= 6 - \ln(7) + \ln(3) - 4 + \ln(5) - \ln(1) = 2 + \ln\left(\frac{15}{7}\right) \approx \underline{\underline{2{,}762\,[FE]}} \end{aligned}$$

1.6 **Begründung der Umkehrbarkeit**

Im Intervall $]3;\infty[$ ist G_f und damit auch G_g streng monoton fallend. Somit existiert auch die Umkehrfunktion.

Term der Umkehrfunktion

Um den Term der Umkehrfunktion zu bestimmen, werden in $g(x)$ x und y vertauscht, und es wird wieder nach y umgeformt:

$$\begin{aligned} && x &= \frac{(y-1)^2}{(y+1)(y-3)} \\ \Longleftrightarrow && x &= \frac{y^2-2y+1}{y^2-2y-3} && |\cdot(y^2-2y-3) \\ \Longleftrightarrow && xy^2-2xy-3x &= y^2-2y+1 && |-(y^2-2y+1) \\ \Longleftrightarrow && 0 &= (x-1)y^2+(2-2x)y-3x-1 \\ \Longleftrightarrow && y_{1;2} &= \frac{-(2-2x)\pm\sqrt{(2-2x)^2-4\cdot(x-1)\cdot(-3x-1)}}{2\cdot(x-1)} \\ \Longleftrightarrow && y_{1;2} &= \frac{2x-2\pm\sqrt{4-8x+4x^2+12x^2-8x-4}}{2x-2} \\ \Longleftrightarrow && y_{1;2} &= 1\pm\frac{\sqrt{16x^2-16x}}{2x-2} \\ \Longleftrightarrow && y_{1;2} &= 1\pm\frac{\sqrt{16(x^2-x)}}{2x-2} \\ \Longleftrightarrow && y_{1;2} &= 1\pm\frac{2\sqrt{x^2-x}}{x-1} \\ \Longleftrightarrow && y_{1;2} &= 1\pm2\sqrt{\frac{x}{x-1}} \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich von $g(x)$ ist $D_g =]3;\infty[$. Demnach muss der Wertebereich der Umkehrfunktion $W_{g^{-1}} =]3;\infty[$ sein. Dies ist nur für eine der Lösungen (mit „+") gegeben. Die Gleichung der Umkehrfunktion lautet:

$$\underline{\underline{g^{-1}(x) = 1 + 2\sqrt{\frac{x}{x-1}}}}$$

Definitionsmenge
Der Definitionsbereich der Umkehrfunktion entspricht dem Wertebereich von $g(f)$. Dieser ist aus den vorherigen Teilaufgaben bekannt, es gilt also $\underline{\underline{D_{g^{-1}} =]1;\, \infty[}}$.

Steigung
Um die Steigung bei $x = \frac{4}{3}$ zu bestimmen, muss die erste Ableitung der Umkehrfunktion an dieser Stelle bestimmt werden. Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt:

$$(g^{-1})'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)}$$

Mit den Teilergebnissen der letzen Teilaufgabe und $g(x) = f(x)$ auf D_g folgt:

$$\begin{aligned}(g^{-1})'\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)} = \frac{1}{f'\left(1+2\sqrt{\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}-1}}\right)} = \frac{1}{f'(1+2\sqrt{4})} \\ &= \frac{1}{f'(5)} = \frac{1}{\frac{8(1-5)}{(5^2-2\cdot 5-3)^2}} = \frac{(5^2-2\cdot 5-3)^2}{8(1-5)} = \frac{12^2}{8\cdot(-4)} = \underline{\underline{-\frac{9}{2}}}\end{aligned}$$

Die Steigung des Graphen von g^{-1} an der Stelle $x = \frac{4}{3}$ beträgt $-\frac{9}{2}$.

2 Betrachtet wird weiterhin die Funktion $k\colon x \mapsto \arctan(f(x))$ mit f aus Aufgabe 1 und $D_k = D_f$.

2.1 **Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ und $x \to 3$**
Um die Grenzwerte zu berechnen, werden die Ergebnisse der Grenzwerte von $f(x)$ aus Teilaufgabe 1.2 verwendet:

$$\begin{aligned}x \to \pm\infty\colon k(x) &= \arctan(\underbrace{f(x)}_{\to 1}) \to \frac{\pi}{4} \\ x \to 3^-\colon k(x) &= \arctan(\underbrace{f(x)}_{\to -\infty}) \to -\frac{\pi}{2} \\ x \to 3^+\colon k(x) &= \arctan(\underbrace{f(x)}_{\to \infty}) \to \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Gleichung der Asymptote
Aus dem Verhalten von $x \to \pm\infty$ resultiert eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $\underline{\underline{y = \frac{\pi}{4}}}$.

2.2 Gemäß der Kettenregel gilt für die erste Ableitung der Funktion:

$$k'(x) = \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$$

Der Nennerterm ist stets positiv, da $f(x)$ quadriert wird. Damit stimmen die Vorzeichen von $f'(x)$ und $k'(x)$ überein, der Graph von $k(x)$ weißt das selbe Monotonieverhalten auf wie der Graph von f(x), ist also streng streng monoton steigend in den Intervallen $]-\infty; -1[$ und $]-1; 1]$ und streng monoton fallend in den Intervallen $[1; 3[$ und $]3; \infty[$.

Aufgabe 7 - Kurvendiskussion: FOS13 MT 2018, AII 1 - adaptiert
Themen: Definitionsmenge, Grenzwert, Monotonie, Extrempunkte, Wertemenge

1.0 Gegeben ist die Funktion $g\colon x \mapsto \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}$ mit der in $\mathbb{R}$ maximalen Definitionsmenge D_g.

1.1 Zeigen Sie, dass gilt: $D_g\ [0{,}5; +\infty[$, und ermitteln Sie das Verhalten von $g(x)$ für $x \to +\infty$.
3 BE

1.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und die Koordinaten aller Extrempunkte des Graphen von g. Bestimmen Sie außerdem das Verhalten von $g'(x)$ für $x \to 0{,}5$ und geben Sie die Wertemenge der Funktion g an.

[Teilergebnis: $g'(x) = \dfrac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}$]
10 BE

Die weiteren Aufgaben 1.3 - 1.4 sind nicht mehr relevant.

Lösungsvorschlag A7 Kurvendiskussion: FOS13 MT 2018, AII 1 - adaptiert

1.0 Gegeben ist die Funktion $g(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$ mit der in $\mathbb{R}$ maximalen Definitionsmenge D_g.

1.1 **Definitionsbereich**

Es müssen zwei Bedingungen für x erfüllt sein. Zum Einen darf nie durch null geteilt werden, weshalb $x \neq 0$ gelten muss. Zum Anderen darf der Term unter der Wurzel nicht negativ sein:

$$\begin{aligned} & 2x-1 \geq 0 \qquad && \mid +1 \\ \iff \quad & 2x \geq 1 && \mid :2 \\ \iff \quad & x \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dies erfüllt auch die andere Bedingung. Somit ist $\underline{\underline{D_g = [0{,}5; \infty[}}$.

Verhalten von g(x) für $x \to +\infty$

Um den Grenzwert zu bestimmen ist es hilfreich den Funktionsterm wie folgt umzuformen:

$$x \to +\infty : g(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{x} = \sqrt{\frac{2x-1}{x^2}} \to 0 \quad \text{da NG>ZG}$$

1.2 Mit Quotienten- und Kettenregel wird zunächst die erste Ableitung der Funktion bestimmt:

Ermitteln der ersten Ableitung

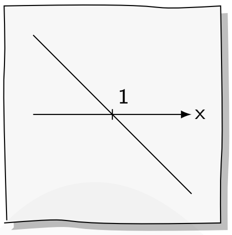
$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\sqrt{2x-1}}{x} \\ g'(x) &= \left[\frac{(\sqrt{2x-1})' \cdot x - \sqrt{2x-1} \cdot (x)'}{x^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2x-1}} \cdot 2 \cdot x - \sqrt{2x-1} \cdot 1}{x^2} && \text{(Anwendung Quotientenregel)} \\ &= \frac{\frac{x}{\sqrt{2x-1}} - \sqrt{2x-1}}{x^2} && \text{(Erweitern mit } \sqrt{2x-1}\text{)} \\ &= \frac{x-(2x-1)}{x^2\sqrt{2x-1}} && \text{(Zusammenfassen)} \\ &= \frac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)} \end{aligned}$$

Maximale Monotonieintervalle und Art und Koordinaten aller Extrempunkte

Wegen des Quadrates und der Wurzel im Nennerterm kann dieser nie negative Werte annehmen. Demnach entspricht das Vorzeichen des Zählerterms dem der ersten Ableitung. Es wird die Nullstelle des Zählerterms bestimmt:

$$1 - x = 0 \qquad | + x$$
$$\Longleftrightarrow \qquad x = 1$$

Skizze des Zählerterms



Möglichkeit 1: Mithilfe einer Skizze
Wie in nebenstehender Skizze gezeigt, handelt es sich beim Zählerterm um eine fallende Gerade. Diese hat positive Werte für $x < 1$ und negative für $x > 1$. Unter Berücksichtigung des Definitionsbereiches ist G_g demnach im Intervall $[0{,}5;\ 1]$ streng monoton steigend und im Intervall $[1;\ \infty[$ streng monoton fallend.
Möglichkeit 2: Mithilfe einer Vorzeichentabelle

x	$x = 0{,}5$	$0{,}5 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x$
$g'(x)$-Zähler: $1 - x$	$+$	$+$	0	$-$
$g'(x)$-Nenner: $x^2\sqrt{2x-1}$	0	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	n. def.	$+$	0	$-$
G_g	TIP	$\nearrow$	HOP	$\searrow$

Demnach liegt bei $x = 0{,}5$ ein Tiefpunkt auf dem Rand und bei $x = 1$ ein Hochpunkt vor. Es werden die jeweiligen Funktionswerte bestimmt:

$$g(0{,}5) = \frac{\sqrt{2 \cdot 0{,}5 - 1}}{0{,}5} = 0 \qquad g(1) = \frac{\sqrt{2 \cdot 1 - 1}}{1} = 1$$

Es liegt also ein Randtiefpunkt mit den Koordinaten $\underline{\underline{\text{TIP}\,(0{,}5\,|\,0)}}$ und ein Hochpunkt mit den Koordinaten $\underline{\underline{\text{HOP}\,(1\,|\,1)}}$ vor.

Verhalten von $g'(x)$ für $x \to 0{,}5$
Es wird eine Grenzwertbetrachtung durchgeführt:

$$x \to 0{,}5^+ : g'(x) = \frac{\overbrace{1 - x}^{\to 0{,}5}}{\underbrace{x^2}_{\to 0{,}25}\ \underbrace{\sqrt{2x-1}}_{\to 0^+}} \to +\infty$$

Wertebereich
Aus dem Monotonieverhalten, den Koordinaten der Extrempunkte und dem Grenzwertverhalten von $g(x)$ für $x \to +\infty$ ergibt sich der Wertebereich zu $\underline{\underline{W_g = [0;\ 1]}}$.

Aufgabe 8 - Kurvendiskussion: FOS13 MT 2019, AII 2
Themen: Grenzwert, Monotonie, Extrempunkte, Integral

1.0 Gegeben ist die Funktion $h\colon x \mapsto \arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ in der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

1.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von h für $x \to +\infty$ und für $x \to 0^+$. **3 BE**

1.2 Ermitteln Sie das Monotonierverhalten des Graphen von h.

[Mögliches Teilergebnis: $h'(x) = \frac{2}{x^2+1}$] **5 BE**

1.3.0 Gegeben ist die Funktion $H\colon x \mapsto \int_1^x h(t)\,dt$ mit der Definitionsmenge $D_H = \mathbb{R}^+$.

1.3.1 Ermitteln Sie ohne Verwendung der integralfreien Darstellung von H(x) die Art und die Koordinaten des relativen Extrempunkts des Graphen von H. **4 BE**

1.3.2 Bestimmen Sie für die Funktion H eine integralfreie Darstellung. **5 BE**

Lösungsvorschlag A8: Kurvendiskussion: FOS13 MT 2019, AII 2

1.0 Gegeben ist die Funktion $h(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ mit Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

1.1 **Verhalten der Funktionswerte für $x \to +\infty$ und $x \to 0^+$**

$$x \to \infty:\ h(x) = \arctan\left(\overbrace{\frac{\overbrace{x^2}^{\to\infty} - 1}{\underbrace{2x}_{\to\infty}}}^{\to\infty}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{(da ZG>NG)}$$

$$x \to 0^+:\ h(x) = \arctan\left(\underbrace{\frac{\overbrace{x^2-1}^{\to -1^+}}{\underbrace{2x}_{\to 0^+}}}_{\to -\infty}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

1.2 **Ermitteln der ersten Ableitung**
Mithilfe von Ketten- und Quotientenregel wird die erste Ableitung ermittelt.

$$h(x) = \arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

$$h'(x) = \left[\frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2} \cdot \left(\frac{x^2-1}{2x}\right)'\right] \qquad \text{(Ansatz Kettenregel)}$$

$$= \left[\frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2} \cdot \frac{(x^2-1)' \cdot (2x) - (x^2-1) \cdot (2x)'}{(2x)^2}\right] \qquad \text{(Ansatz Quotientenregel)}$$

$$= \frac{1}{\frac{4x^2}{4x^2} + \frac{(x^2-1)^2}{4x^2}} \cdot \frac{2x \cdot 2x - (x^2-1) \cdot 2}{4x^2} \qquad \text{(Anwendung)}$$

$$= \frac{1}{\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{4x^2}} \cdot \frac{4x^2 - 2x^2 + 2}{4x^2} \qquad \text{(Zusammenfassen)}$$

$$= \frac{\cancel{4x^2}}{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1} \cdot \frac{2x^2+2}{\cancel{4x^2}} \qquad \text{(Kürzen)}$$

$$= \frac{2x^2+2}{x^4+2x^2+1} \qquad \text{(Ausklammern; binom. Formel)}$$

$$= \frac{2\cancel{(x^2+1)}}{(x^2+1)^{\cancel{2}}} \qquad \text{(Kürzen)}$$

$$= \frac{2}{x^2+1} \qquad \text{(Zur Kontrolle angegeben)}$$

Monotonieverhalten
Für Zähler- und Nennerterm der ersten Ableitung gilt $2 > 0$ und $x^2 + 1 > 0$ und damit auch $h'(x) > 0$ für alle $x \in D_h$. Der Graph von h ist somit streng monoton steigend in $]-\infty; 0[$ und $]0; \infty[$.

1.3.0 Gegeben ist nun die Funktion $H(x) = \int_1^x h(t)dt$ mit Definitionsmenge $D_H = \mathbb{R}^+$.

1.3.1 **Art und Koordinaten des relativen Extrempunkts**
Für die erste Ableitung der Funktion H(x) gilt $H'(x) = h(x)$. Damit kann die Nullstelle der ersten Ableitung gesucht werden:

$$\begin{aligned} && H'(x) = h(x) &= 0 \\ \Longleftrightarrow && \arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) &= 0 \\ \Longleftrightarrow && \frac{x^2-1}{2x} &= 0 \\ \Longleftrightarrow && x^2-1 &= 0 && \mid +1 \\ \Longleftrightarrow && x^2 &= 1 && \mid\sqrt{} \\ \Longleftrightarrow && x_{1;2} &= \pm 1 \end{aligned}$$

Da allerdings $-1 \notin D_H$ ist, muss nur $x = 1$ betrachtet werden. Um über die Art des möglichen Extrempunktes zu entscheiden wird der Wert der zweiten Ableitung an dieser Stelle untersucht. Dabei ist $H''(x) = h'(x)$. Eingesetzt gilt:

$$H''(1) = h'(1) = \frac{2}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TIP}$$

Außerdem muss noch der Funktionswert an dieser Stelle bestimmt werden. Da für $x = 1$ obere und untere Integrationsgrenze gleich sind, gilt:

$$H(1) = \int_1^1 h(t)dt = 0$$

Die Koordinaten des relativen Tiefpunkts lauten also $\underline{\underline{\text{TIP}\,(1\,|\,0)}}$.

1.3.2 **Integralfreie Darstellung der Funktion** H
Für die Berechnung der integralfreien Form wird partiell integriert.
(Hinweis: Integral des Typs „Einser“; für die partielle Integration wird die Funktion mit 1 multipliziert)

$$H(x) = \int_1^x \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{h(t)}_{u}\,dt = [\underbrace{t}_{v} \cdot \underbrace{h(t)}_{u}]_1^x - \int_1^x \underbrace{t}_{v} \cdot \underbrace{h'(t)}_{u'}\,dt$$

$$= x \cdot h(x) - (1 \cdot h(1)) - \int_1^x \frac{2t}{t^2+1} dt = x \cdot h(x) - (1 \cdot 0) - [\ln(t^2+1)]_1^x$$

$$= x \cdot h(x) - \ln(x^2+1) - (-(\ln(1^2+1))$$

$$= \underline{\underline{x \cdot \arctan\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) - \ln(x^2+1) + \ln(2)}}$$

Aufgabe 9 - Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2014, AI 2
Themen: Grenzwert, Monotonie, Extrempunkte, Rotationsvolumen

1.0 Gegeben ist nun die Funktion $g\colon x \mapsto 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

1.1 Ermitteln Sie das Verhalten von $g(x)$ für $x \to +\infty$. **3 BE**

1.2 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von g. **8 BE**

1.3 Der Graph von g, die x – Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 4$ schließen eine Fläche A ein. Bei der Rotation der Fläche A um die x – Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumeninhalts dieses Rotationskörpers. **6 BE**

Lösungsvorschlag A9 Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2014, AI 2

1.0 Gegeben ist nun die Funktion $g\colon x \mapsto 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

1.1 Es wird das Verhalten der Funktion im Unendlichen betrachtet.

$$x \to \infty\colon g(x) = 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{\overbrace{4 \cdot \sqrt{x}}^{\to\infty}}{\underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\to\infty}} \to 0 \quad \text{(da e-Fkt. dominiert)}$$

1.2 Es wird zunächst mithilfe von Produkt- und Kettenregel die erste Ableitung der Funktion bestimmt.

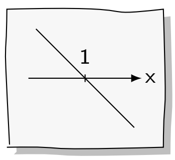
Ermitteln der ersten Ableitung

$$\begin{aligned}
g(x) &= 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \\
g'(x) &= 4 \cdot \left[(\sqrt{x})' \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \sqrt{x} \cdot (e^{-\frac{1}{2}x})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\
&= 4 \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)} \\
&= 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + 4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 2\sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} && \text{((}e^{-\frac{1}{2}x}\text{) Ausklammern)} \\
&= e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{x} - 2\sqrt{x}}\right) && \text{((}\tfrac{2}{\sqrt{x}}\text{) Ausklammern)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{x}} e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (1 - x) && \text{(Mit } D_{g'} =]0;\, \infty[\text{)}
\end{aligned}$$

Monotonieverhalten und Koordinaten der Extrempunkte

Da sowohl die Wurzel im Nennerterm des Bruchs, als auch $e^{-\frac{1}{2}x}$ für $x \in D_{g'}$ positive Werte annehmen, hängt das Vorzeichen der ersten Ableitung vom Ausdruck in der Klammer ab. Dabei handelt es sich um den Term einer linearen Funktion (siehe Skizze):

Skizze



$$\begin{aligned}
g'(x) > 0 &\iff (1 - x) > 0 \iff 0 < x < 1 \\
g'(x) < 0 &\iff (1 - x) < 0 \iff 1 < x
\end{aligned}$$

Somit ist der Graph G_g im Intervall $[0;\, 1]$ streng monoton steigend und in $[1;\, \infty[$ streng monoton fallend.

Aus dem Monotonieverhalten folgt, dass ein Maximum bei $x = 1$ liegt. Gleichzeitig liegt ein Randminimum am linken Rand des Definitionsbereichs bei $x = 0$. Für die Funktionswerte an diesen Stellen gilt:

$$g(1) = 4 \cdot \sqrt{1} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 1} = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{\sqrt{e}}$$
$$g(0) = 4 \cdot \sqrt{0} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} = 0$$

Damit ergeben sich die Koordinaten der Extrempunkte zu TIP$\underline{\underline{(0\,|\,0)}}$ und $\underline{\underline{\text{HOP}\left(1\,\middle|\,\frac{4}{\sqrt{e}}\right)}}$.

1.3 Um das Volumen des Rotationskörpers zu berechnen wird folgende Formel verwendet. Um das Integral zu lösen wird dabei partiell integriert.
(Hinweis: Integral des Typs „Abräumer“; durch mehrmaliges partielles Integrieren verschwindet im Integral das Polynom als Faktor)

$$V = \pi \cdot \int_0^4 (g(x))^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 \left(4 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^4 16x \cdot e^{-x} dx = 16\pi \cdot \int_0^4 x \cdot e^{-x} dx$$
$$= 16\pi \cdot \left([x \cdot (-e^{-x})]_0^4 - \int_0^4 (-e^{-x}) dx \right) = 16\pi \cdot \left([x \cdot (-e^{-x})]_0^4 - [e^{-x}]_0^4 \right)$$
$$= 16\pi \cdot \left(-4e^{-4} + 0 \cdot e^{-0} - \left(e^{-4} - e^{-0}\right)\right) = 16\pi \cdot (-4e^{-4} - e^{-4} + 1)$$
$$= \underline{\underline{16\pi \cdot (1 - 5e^{-4})\,[VE]}} \approx 45{,}66\,[VE]$$

Aufgabe 10 - Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2016, AII 3
Themen: Extrempunkte, Graphische Darstellung, Rotationsvolumen

1.0 Gegeben ist nun die Funktion $h\colon x \mapsto 5x \cdot e^{2x}$ mit $D_h =]-\infty; 0]$.

1.1 Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von h. Zeichnen Sie den Graphen für $-3 \leq x \leq 0$ ($1\,\text{LE} = 2\,\text{cm}$). **7 BE**

1.2 Bei der Rotation des Graphen von h um die x-Achse entsteht ein unendlich ausgedehnter Drehkörper.
Berechnen Sie die Maßzahl seines Volumens. **7 BE**

Lösungsvorschlag A10 Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2016, AII 3

1.0 Gegeben ist die Funktion $h\colon x \mapsto 5x \cdot e^{2x}$ mit $D_h =]-\infty; 0]$.

1.1 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Mithilfe der Produktregel wird die erste Ableitung der Funktion berechnet:

$$\begin{aligned} h(x) &= 5x \cdot e^{2x} \\ h'(x) &= \left[(5x)' \cdot e^{2x} + 5x \cdot (e^{2x})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\ &= 5 \cdot e^{2x} + 5x \cdot e^{2x} \cdot 2 && \text{(Anwendung und } (5e^{2x}) \text{ Ausklammern)} \\ &= 5e^{2x} \cdot (1 + 2x) \end{aligned}$$

Art und Koordinaten der Extrempunkte

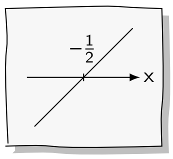
Die Nullstellen der ersten Ableitung entsprechen möglichen Extremstellen der Funktion. Da die Exponentialfunktion nie Null wird, gilt:

$$h'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

Da der Exponentialterm stets positiv ist, entspricht das Vorzeichen der Ableitung dem Vorzeichen des Terms $(1 - 2x)$. Dabei handelt es sich um eine lineare Funktion (siehe Skizze), sodass gilt:

$$\begin{aligned} x < -\frac{1}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad h'(x) < 0 \\ x > -\frac{1}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad h'(x) > 0 \end{aligned}$$

Skizze



Unter Beachtung des Definitionsbereichs ist der Graph von $h(x)$ somit streng monoton fallend im Intervall $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$ und streng monoton wachsend im Intervall $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$. Damit liegt bei $x = -\frac{1}{2}$ ein Minimum vor. Da die Funktion in $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ wachsend ist, liegt außerdem ein Randmaximum bei $x = 0$ vor. Durch Einsetzen werden die zugehörigen Funktionswerte bestimmt:

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{5}{2}e^{-1} = -\frac{5}{2e}$$
$$f(0) = 5 \cdot 0 \cdot e^{2 \cdot 0} = 0$$

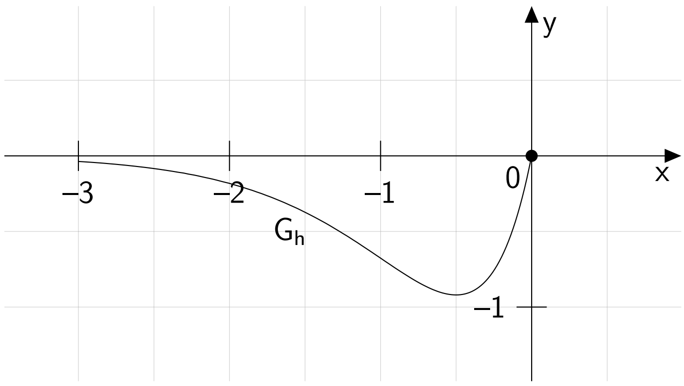
Es liegt ein lokales Minimum $\underline{\underline{TIP\left(-\frac{1}{2} \,\middle|\, -\frac{5}{2e}\right)}}$ und ein Randmaximum $\underline{\underline{HOP\,(0\,|\,0)}}$ auf dem Rand vor.

Graphische Darstellung

Zum Zeichnen wird zunächst eine Wertetabelle aufgestellt:

x	–3	–2	–1,5	–1	–0,5	0
h(x)	–0,04	–0,18	–0,37	–0,68	–0,92	0

Grafische Darstellung:



1.2 Für das Rotationsvolumen gilt:

$$k \to -\infty: V = \pi \cdot \int_k^0 (h(x))^2 dx = 25 \cdot \pi \cdot \int_k^0 x^2 \cdot e^{4 \cdot x} dx$$

Das Integral wird dabei zunächst unbestimmt gelöst. Dazu wird partiell integriert.
(Hinweis: Integral des Typs „Abräumer"; durch mehrmaliges partielles Integrieren verschwindet im Integral das Polynom als Faktor)

$$u = x^2 \qquad u' = 2x$$
$$v' = e^{4x} \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$$

Eingesetzt gilt für das Integral:

$$\int x^2 \cdot e^{4x} dx = \frac{1}{4}e^{4x} \cdot x^2 - \int \frac{1}{4}e^{4x} \cdot 2x dx = \frac{1}{4}e^{4x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}\int e^{4x} \cdot x dx$$

Erneut wird partiell integriert:

$$u = x \qquad u' = 1$$
$$v' = e^{4x} \qquad v = \frac{1}{4}e^{4x}$$

Für das Integral folgt:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cdot e^{4x} dx &= \frac{1}{4}e^{4x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}\int e^{4x} \cdot x dx \\
&= \frac{1}{4}e^{4x} \cdot x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}e^{4x} \cdot x - \frac{1}{4}\int e^{4x} dx\right) \\
&= \frac{1}{4}e^{4x} \cdot x^2 - \frac{1}{8}e^{4x} \cdot x + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}e^{4x} \\
&= \frac{1}{4}e^{4x} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\right)
\end{aligned}$$

Damit kann der Wert des Rotationsvolumen bestimmt werden.

$$k \to -\infty: V = 25 \cdot \pi \cdot \int_k^0 x^2 \cdot e^{4 \cdot x} dx = 25 \cdot \pi \cdot \left[\frac{1}{4}e^{4x} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\right)\right]_k^0$$

$$= 25 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \underbrace{e^0}_{=1} \cdot \left(0 - 0 + \frac{1}{8}\right) - \underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{4}e^{4k}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{8}\right)}_{\to \infty}\right)}_{\to 0,\text{ da e-Fkt. dom.}}$$

$$\to 25 \cdot \pi \cdot \frac{1}{32} = \underline{\underline{\frac{25}{32}\pi\,[\text{VE}]}}$$

Aufgabe 11 - Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2017, AII 2
Themen: Nullstelle, Grenzwert, Rotationsvolumen

1.0 Gegeben ist weiter die Funktion $h\colon x \mapsto \dfrac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$ mit der Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}_0^+$.

1.1 Ermitteln Sie die Nullstelle von h und das Verhalten von h(x) für $x \to +\infty$. **3 BE**

1.2 Der Graph von h, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen eine Fläche A ein. Bei der Rotation der Fläche A um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers. **5 BE**

Lösungsvorschlag A11 Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2017, AII 2

1.0 Gegeben ist die Funktion $h(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$ mit Definitionsmenge $D_h = \mathbb{R}_0^+$.

1.1 **Nullstelle**

Die Nullstelle der Funktion stimmt mit der Nullstelle des Zählerterms überein, die direkt zu $\underline{\underline{x = 0}}$ abgelesen werden kann, da $\sqrt{0} = 0$.

Verhalten für $x \to +\infty$

$$x \to \infty\colon h(x) = \frac{4\overbrace{\sqrt{x}}^{\to\infty}}{\underbrace{x^2}_{\to\infty}+3} \to 0 \quad \text{(da NG>ZG)}$$

1.2 Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus der Nullstelle bei $x = 0$ und der gegebenen Gerade bei $x = 3$. Für das Rotationsvolumen gilt dann:

$$V = \pi \int_0^3 (h(x))^2 dx = \pi \int_0^3 \frac{16x}{(x^2+3)^2} dx = 16\pi \int_0^3 \frac{x}{(x^2+3)^2} dx$$

Zur Lösung des Integrals wird folgende Substitution verwendet:

$$z = x^2 + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 2x \quad \Longleftrightarrow \quad dx = \frac{dz}{2x}$$

Das Integral wird nun zunächst unbestimmt gelöst:

$$\int \frac{x}{(x^2+3)^2} dx = \int \frac{x}{z^2} \frac{dz}{2x} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{z}\right) + C = -\frac{1}{2z} + C = -\frac{1}{2(x^2+3)} + C$$

Die Integrationskonstante entfällt beim bestimmten Integrieren, sodass für das Volumen weiter gilt:

$$V = 16\pi \int_0^3 \frac{x}{(x^2+3)^2} dx = 16\pi \left[-\frac{1}{2(x^2+3)}\right]_0^3 = -8\pi \left(\frac{1}{3^2+3} - \frac{1}{0^2+3}\right) = -8\pi \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{3}\right)$$
$$= -8\pi \cdot \left(-\frac{3}{12}\right) = \underline{\underline{2\pi\,[\text{VE}]}}$$

Aufgabe 12 - Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2019, AII 1 - adaptiert

Themen: Definitionsmenge (Parameter), Schnittpunkt (Parameter), Symmetrie, Asymptoten, Monotonie, Graphische Darstellung, Umkehrfunktion, Rotationsvolumen

1.0 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto 1 - \frac{2 \cdot e^x}{e^x + a}$ mit $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ und der maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} \subseteq \mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie jeweils in Abhängigkeit von a die maximale Definitionsmenge D_{f_a} und die Koordinaten des Schnittpunkts des Graphen von f_a mit der y-Achse, sofern vorhanden. **5 BE**

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $a = -1$.

1.2 Stellen Sie $f_{-1}(x)$ durch einen einzigen Bruchterm dar und zeigen Sie, dass der Graph von f_{-1} punktsymetrisch zum Koordinatenursprung ist. **5 BE**

1.3 Ermitteln Sie die Gleichungen der waagrechten Asymptoten des Graphen von f_{-1}. **3 BE**

1.4 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten des Graphen von f_{-1}.

[Mögliches Teilergebnis: $f'_{-1}(x) = \frac{2 \cdot e^x}{(e^x - 1)^2}$] **4 BE**

1.5 Zeichnen Sie den Graphen von f_{-1} für $-3 \leq x \leq 3$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartetisches Koordinatensystem ($1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}$). Planen Sie in y-Richtung etwa $-4 \leq y \leq 4$ ein. **4 BE**

1.6.0 Die Funktion f_{-1} ist umkehrbar (Nachweis nicht erforderlich).

1.6.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Umkehrfunktion von f_{-1}. Geben Sie auch die Definitionsmenge der Umkehrfunktion von f_{-1} an. **4 BE**

1.6.2 Der Punkt $Q\,(2\,|\,?)$ liegt auf dem Graphen der Umkehrfunktion von f_{-1}. Berechnen Sie die Steigung der Tangente im Punkt Q an den Graphen der Umkehrfunktion von f_{-1}. **3 BE**

1.7 Der Graph von f_{-1} schließt mit der x-Achse und den senkrechten Geraden bei $x = \ln(2)$ und $x = \ln(15)$ eine endliche Fläche ein. Rotiert diese Fläche um die x-Achse, so entsteht ein rotationssymetrischer Körper.
Zeigen Sie zunächst, dass gilt: $\left(1 - \frac{2e^x}{e^x - 1}\right)^2 = 1 + \frac{4e^x}{(e^x - 1)^2}$. Berechnen Sie anschließend die Maßzahl der Volumens des rotationsymmetrischen Körpers. **7 BE**

Lösungsvorschlag A12 Kurvendiskussion/Rotation: FOS13 MT 2019, AII 1 - adaptiert

1.0 Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = 1 - \dfrac{2 \cdot e^x}{e^x + a}$ mit $a \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

1.1 **Definitionsmenge**

Die Definitionsmenge wird eingeschränkt, da nicht durch null geteilt werden darf. Es werden nun zwei Fälle unterschieden:

Fall 1: $a > 0$

In diesem gilt für $e^x + a > 0$. Somit kann nie durch nie dividiert werden und die Definitionsmenge in diesem Fall lautet $\underline{\underline{D_{f_a} = \mathbb{R}}}$.

Fall 2: $a < 0$

In diesem Fall muss speziell die Bedingung $e^x + a \neq 0$ gefordert werden:

$$\begin{aligned} & e^x + a \neq 0 && | -a \\ \Longleftrightarrow \quad & e^x \neq -a && | \ln(\ ) \\ \Longleftrightarrow \quad & x \neq \ln(-a) && \end{aligned}$$

In diesem Fall lautet die Definitionsmenge also $\underline{\underline{D_{f_a} = \mathbb{R} \backslash \{\ln(-a)\}}}$.

Schnittpunkt mit der y-Achse

Um diesen zu bestimmen wird $x = 0$ in die Funktionsgleichung eingesetzt. Gemäß der eben bestimmten Definitionsmenge muss dabei bereits jetzt der Fall $a = -1$ ausgeschlossen werden, da in diesem Fall $x = 0 = \ln(-(-1)) \notin D_{f_{-1}}$ ist. Für alle Fälle $a \neq -1$ gilt also:

$$f_a(0) = 1 - \frac{2 \cdot e^0}{e^0 + a} = 1 - \frac{2 \cdot 1}{1 + a} = 1 - \frac{2}{1 + a}$$

Für $a \neq -1$ lauten die Koordinaten des Schnittpunkts mit der y-Achse also $\underline{\underline{\left(0 \middle| 1 - \frac{2}{1+a}\right)}}$.

1.2 **Darstellung durch einen einzigen Bruchterm**

Der Gegebene Term wird erweitert und zusammengefasst:

$$f_{-1}(x) = 1 - \frac{2e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1}{e^x - 1} - \frac{2e^x}{e^x - 1} = \frac{e^x - 1 - 2e^x}{e^x - 1} = \frac{-1 - e^x}{-1 + e^x} = \frac{\cancel{(-1)}(1 + e^x)}{\cancel{(-1)}(1 - e^x)} = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$$

Nachweis der Punktsymmetrie

Wenn Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung vorliegen soll, muss die Bedingung $f_{-1}(-x) = -f_{-1}(x)$ erfüllt sein.

$$f_{-1}(-x) = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1 + e^x}{(-1)(1 - e^x)} = -\frac{1 + e^x}{1 - e^x} = -f_{-1}(x) \quad \text{q.e.d.}$$

1.3 **Gleichungen der waagrechten Asymptoten**

Um die Gleichungen zu bestimmen wird das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ betrachtet.

$$x \to -\infty: f_{-1}(x) = \frac{1 + \overbrace{e^x}^{\to 0}}{1 - \underbrace{e^x}_{\to 0}} \to \frac{1}{1} = 1$$

Somit liegt eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $\underline{\underline{y = 1}}$ vor. Aufgrund der Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung existiert eine weitere Asymptote mit der Gleichung $\underline{\underline{y = -1}}$.

1.4 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Mithilfe der Quotientenregel wird die erste Ableitung der Funktion bestimmt:

$$\begin{aligned}
f_{-1}(x) &= \frac{1 + e^x}{1 - e^x} \\
f'_{-1}(x) &= \left[\frac{(1 + e^x)' \cdot (1 - e^x) - (1 + e^x) \cdot (1 - e^x)'}{(1 - e^x)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \frac{e^x \cdot (1 - e^x) - (1 + e^x) \cdot (-e^x)}{(1 - e^x)^2} && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{e^x - e^{2x} + e^x + e^{2x}}{(1 - e^x)^2} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= \frac{2e^x}{(1 - e^x)^2} && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}$$

Monotonieverhalten

Weil die Exponentialfunktion stets positive Werte annimmt, gilt für den Zählerterm stets $2e^x > 0$. Auch der Nennerterm ist aufgrund des Quadrates und unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs stets positiv.

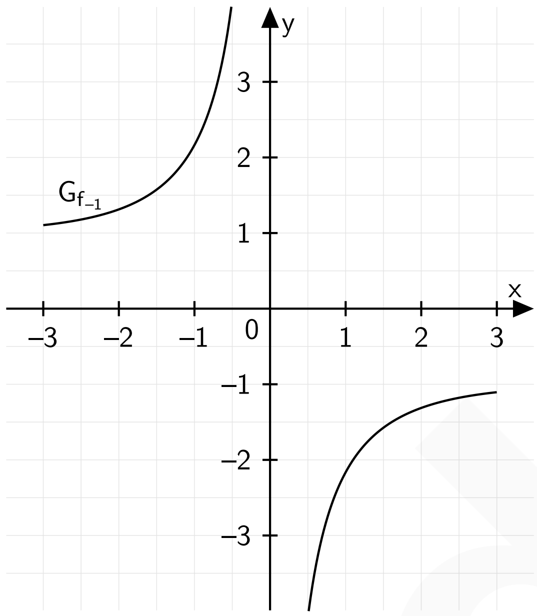
Somit ist für alle $x \in D_{f_{-1}}$ die Bedingung $f'_{-1}(x) > 0$ erfüllt. Der Graph $G_{f_{-1}}$ ist damit streng monoton steigend in $]-\infty; 0[$ und $]0; \infty[$.

1.5 **Graphische Darstellung**

Die Zeichnung soll folgende Elemente enthalten: Für die graphische Darstellung wird eine Wertetabelle als Hilfestellung erstellt:

x	–3	–2	–1	–0,5	0,5	1	2	3
$f_{-1}(x)$	1,10	1,31	2,16	4,08	–4,08	–2,16	–1,31	–1,10

Mithilfe dieser Werte kann nun die grafische Darstellung erfolgen:



1.6.1 **Term der Umkehrfunktion**

Um diesen zu bestimmen werden im Term von f_{-1} x und y vertauscht und wieder nach y umgeformt:

$$
\begin{aligned}
& & x &= \frac{1+e^y}{1-e^y} & &|\cdot(1-e^y)\\
&\Longleftrightarrow & x - xe^y &= 1+e^y & &|+xe^y\\
&\Longleftrightarrow & x &= 1+e^y+xe^y & &|-1\\
&\Longleftrightarrow & xe^y+e^y &= x-1 & &\\
&\Longleftrightarrow & e^y(x+1) &= x-1 & &|:(x+1)\\
&\Longleftrightarrow & e^y &= \frac{x-1}{x+1} & &|\ln(\ )\\
&\Longleftrightarrow & y &= \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) & &
\end{aligned}
$$

Der Funktionsterm der Umkehrfunktion lautet $\underline{\underline{f_{-1}^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}}$.

Definitionsmenge

Die Definitionsmenge der Umkehrfunktion entspricht der Wertemenge der ursprünglichen Funktion. Diese ergibt sich aus den Ergebnissen der letzten Teilaufgaben aus der Monotonie und den Gleichungen der Asymptoten. Es gilt $D_{f_{-1}^{-1}} = W_{f_{-1}} = \underline{\underline{\mathbb{R}\setminus[-1;\,1]}}$.

1.6.2 **Steigung der Tangente**

Zunächst werden die Koordinaten des Punktes Q durch Einsetzen in den Funktionsterm von f_{-1}^{-1}

bestimmt:

$$f_{-1}^{-1}(2) = \ln\left(\frac{2-1}{2+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

Um die Steigung der Tangente an dieser Stelle zu bestimmen verwendet man die ermittelte y-Koordinate von Q sowie die erste Ableitung der Funktion $f_{-1}(x)$:

$$(f_{-1}^{-1})'(2) = \frac{1}{f'_{-1}(\ln(\frac{1}{3}))} = \frac{1}{-\frac{2\cdot(-1)\cdot e^{\ln(\frac{1}{3})}}{(e^{\ln(\frac{1}{3})}-1)^2}} = \frac{1}{-\frac{-2\cdot\frac{1}{3}}{(\frac{1}{3}-1)^2}} = \frac{(\frac{1}{3}-1)^2}{2\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

Die Steigung der Tangente an den Graphen der Umkehrfunktion von f_{-1} im Punkt Q ist $\underline{\underline{\frac{2}{3}}}$.

1.7 **Nachweis der gegebenen Gleichung**

Zunächst wird gezeigt, dass die gegebene Gleichung korrekt ist:

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{2e^x}{e^x-1}\right) &= 1-\frac{4e^x}{e^x-1}+\frac{4e^{2x}}{(e^x-1)^2} = 1-\frac{4e^x(e^x-1)}{(e^x-1)^2}+\frac{4e^{2x}}{(e^x-1)^2}\\ &= 1+\frac{-4e^{2x}+4e^x}{(e^x-1)^2}+\frac{4e^{2x}}{(e^x-1)^2} = 1+\frac{-4e^{2x}+4e^x+4e^{2x}}{(e^x-1)^2}\\ &= 1+\frac{4e^x}{(e^x-1)^2} \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Lösen des Integrals

Das Rotationsvolumen berechnet sich dann gemäß folgender Gleichung:

$$V = \pi \cdot \int_{\ln(2)}^{\ln(15)} (f_{-1}(x))^2 dx$$

Zunächst wird das Integral einzeln und unbestimmt gelöst. Dafür wird die Gleichheit der beiden Terme ausgenutzt die im ersten Teil der Teilaufgabe gezeigt wurde:

$$\int (f_{-1}(x))^2 dx = \int \left(1-\frac{2e^x}{e^x-1}\right)^2 dx = \int \left(1+\frac{4e^x}{(e^x-1)^2}\right) dx = x + \int \frac{4e^x}{(e^x-1)^2} dx$$

Die Lösung des Integrals erfolgt mithilfe einer Substitution:

$$z = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dz}{dx} = e^x = z \quad \Longleftrightarrow \quad dx = \frac{dz}{z}$$

Eingesetzt in das Integral:

$$\int (f_{-1}(x))^2 dx = x + \int \frac{4z}{(z-1)^2}\frac{dz}{z} = x + \int \frac{4}{(z-1)^2} dz = x - \frac{4}{z-1} + C$$

$$= x - \frac{4}{e^x - 1} + C \quad \text{(rücksubstituiert)}$$

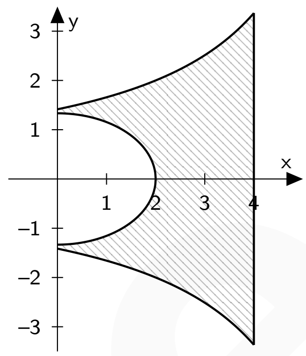
Berechnen der Maßzahl des Volumens

Damit kann nun das Volumen berechnet werden:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int\limits_{\ln(2)}^{\ln(15)} (f_{-1}(x))^2 dx = \pi \cdot \left[x - \frac{4}{e^x - 1}\right]_{\ln(2)}^{\ln(15)} \\
&= \pi \cdot \left(\ln(15) - \frac{4}{e^{\ln(15)} - 1} - \left(\ln(2) - \frac{4}{e^{\ln(2)} - 1}\right)\right) \\
&= \pi \cdot \left(\ln(15) - \frac{4}{15 - 1} - \left(\ln(2) - \frac{4}{2 - 1}\right)\right) = \pi \cdot \left(\ln(15 - \frac{2}{7} - \ln(2) + 4\right) = \pi \cdot \left(\frac{26}{7} + \ln\left(\frac{15}{2}\right)\right) \\
&\approx \underline{\underline{18{,}0}}\,[VE]
\end{aligned}$$

Aufgabe 13 - Rotation um die x-Achse: FOS13 MT 2012, AII 2

1 Rotiert die nebenstehende schraffierte Fläche um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper. Nach oben bzw. nach unten wird der Querschnitt durch die Funktionen $y = \pm\frac{\sqrt{98+x}}{7-x}$ und nach innen durch $y = \pm\frac{2}{3} \cdot \sqrt{4-x^2}$ begrenzt.
Berechnen Sie die Volumenmaßzahl des rotationssymmetrischen Körpers auf eine Nachkommastelle genau.



9 BE

Lösungsvorschlag A13 Rotation um die x-Achse: FOS13 MT 2012, AII 2

1 Hier muss zunächst das Volumen der äußeren Begrenzungsfläche berechnet werden und von dieser dann das Innere abgezogen werden. Wendet man die entsprechende Volumenformel an, so gilt:

$$V_{ges} = V_A - V_I = \pi \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{98+x}}{7-x} \right)^2 dx - \pi \int_0^2 \left(\frac{2}{3}\sqrt{4-x^2} \right)^2 dx$$

Zur Berechnung werden die beiden Integrale berechnet.

Für die Lösung des ersten Teilintegrals wird folgende Substitution verwendet:

$$z = 7 - x \quad \Longleftrightarrow \quad x = 7 - z \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dx}{dz} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad dx = -dz$$

Dann kann das erste Integral zunächst unbestimmt gelöst werden:

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{\sqrt{98+x}}{7-x} \right)^2 dx &= \int \frac{98+x}{(7-x)^2} dx = \int \left(\frac{98}{(7+x)^2} + \frac{x}{(7+x)^2} \right) dx \\ &= \int -\left(\frac{98}{z^2} + \frac{7-z}{z^2} \right) dz = \int -\left(\frac{98}{z^2} + \frac{7}{z^2} - \frac{z}{z^2} \right) dz = \int -\left(\frac{105}{z^2} - \frac{1}{z} \right) dz \\ &= \frac{105}{z} + \ln|z| + C = \frac{105}{7-x} + \ln|7-x| + C \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Formel des Rotationsvolumens kann damit bereits V_A ermittelt werden. Die Integrationskonstante entfällt, da nun bestimmt integriert wird:

$$\begin{aligned} V_A &= \pi \int_0^4 \left(\frac{\sqrt{98+x}}{7-x} \right)^2 dx = \pi \left[\frac{105}{7-x} + \ln|7-x| \right]_0^4 \\ &= \pi \left(\frac{105}{7-4} + \ln(7-4) - \left(\frac{105}{7-0} + \ln(7-0) \right) \right) \\ &= \pi(35 + \ln(3) - 15 - \ln(7)) = \underline{\pi \left(20 + \ln\left(\frac{3}{7}\right) \right) \text{ [VE]}} \end{aligned}$$

Für das zweite Teilintegral und damit für V_I gilt:

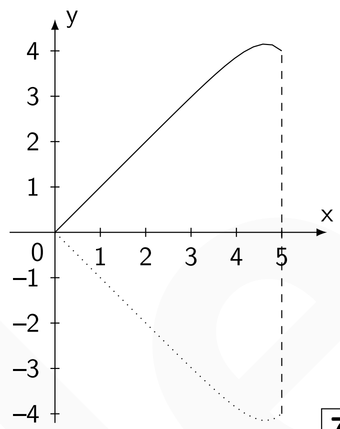
$$\begin{aligned} V_I &= \pi \int_0^2 \left(\frac{2}{3}\sqrt{4-x^2} \right)^2 dx = \pi \int_0^2 \frac{4}{9}(4-x^2) dx = \frac{4}{9}\pi \int_0^2 (4-x^2) dx = \frac{4}{9}\pi \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{9}\pi \left(4 \cdot 2 - \frac{1}{3}2^3 - \left(4 \cdot 0 - \frac{1}{3}0^3 \right) \right) = \frac{4}{9}\pi \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \underline{\frac{64}{27}\pi \text{ [VE]}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich das gesuchte Gesamtvolumen wie folgt.

$$V_{ges} = V_A - V_I = \pi \left(20 + \ln\left(\frac{3}{7}\right) \right) - \frac{64}{27}\pi = \pi \left(\frac{476}{27} + \ln\left(\frac{3}{7}\right) \right) \approx \underline{\underline{52{,}7 \text{ [VE]}}}$$

Aufgabe 14 - Rotation um die x-Achse: FOS13 MT 2015, AI 3

1 Für eine Zaunkonstruktion werden für die Standsäulen Kronenabschlüsse benötigt.
Ein Teil des Graphen der Funktion k mit $k(x) = x - e^{2x-10}$ bildet die obere Kontur einer solchen zwiebelförmigen Säulenkrönung, die durch Rotation des Graphen von k um die positive $x-$Achse entsteht (siehe nebenstehende Graphik). Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers, wenn seine Höhe 5 LE beträgt. Runden Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle.



7 BE

Lösungsvorschlag A14 Rotation um die x-Achse: FOS13 MT 2015, AI 3

1 Das Rotationsvolumen berechnet sich gemäß folgender Formel:

$$V = \pi \int_0^5 (k(x))^2 dx = \pi \int_0^5 (-e^{2x-10} + x)^2 dx = \pi \int_0^5 (e^{4x-20} - 2xe^{2x-10} + x^2) dx$$

Dieser Ausdruck kann summandenweise integriert werden. Das Integral des zweiten Summanden $2x \cdot e^{2x-10}$ ist jedoch nicht sofort lösbar und wird daher gesondert gelöst, wobei partielle Integration verwendet wird:

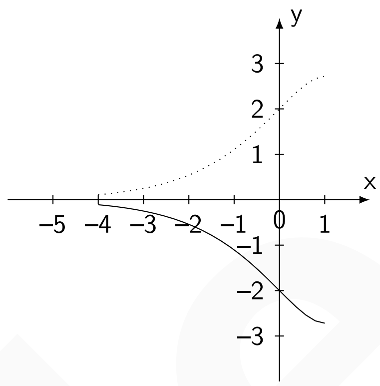
$$\begin{aligned} \int 2x \cdot e^{2x-10} dx &= 2x \cdot \frac{1}{2} e^{2x-10} - \int 2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x-10} dx \\ &= x \cdot e^{2x-10} - \frac{1}{2} e^{2x-10} + C,\ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dies kann oben eingesetzt und weiter gelöst werden (die Konstante C entfällt dabei, da bestimmt integriert wird):

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^5 (e^{4x-20} - 2xe^{2x-10} + x^2) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{4} e^{4x-20} - xe^{2x-10} + \frac{1}{2} e^{2x-10} + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^5 \\ &= \pi \cdot \left(\frac{1}{4} e^0 - 5e^0 + \frac{1}{2} e^0 + \frac{1}{3} \cdot 5^3 - \left(\frac{1}{4} e^{-20} - 0 \cdot e^{-10} + \frac{1}{2} e^{-10} + \frac{1}{3} \cdot 0 \right) \right) \\ &= \pi \cdot \left(\frac{1}{4} - 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 125 - \left(\frac{1}{4} e^{-20} + \frac{1}{2} e^{-10} \right) \right) \\ &= \pi \cdot \left(\frac{449}{12} - \frac{1}{4} e^{-20} - \frac{1}{2} e^{-10} \right) \\ &\approx \underline{\underline{117{,}5\ [VE]}} \end{aligned}$$

Aufgabe 15 - Rotation um die x-Achse: FOS13 MT 2015, AII 2 - adaptiert

1.0 Die Mantelfläche eines drehsymmetrischen Glaskelchs entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion k mit $k(x) = (x - 2) \cdot e^x, D_k = [-4; 1]$, um die x-Achse. Der Graph von k sowie sein Spiegelbild sind nebenstehender Skizze zu entnehmen. Der Kelch wird anschließend bei $x = -4$ senkrecht verschlossen, aufgestellt und mit einem Ständer versehen. Bei allen Rechnungen soll die Wandstärke des Kelchs vernachlässigt werden. Runden Sie alle Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.



1.1 Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Kelchs. **7 BE**

Die weitere Aufgabe 1.2 ist nicht mehr relevant.

Lösungsvorschlag A15 Rotation um die x-Achse: FOS13 MT 2015, AII 2 - adaptiert

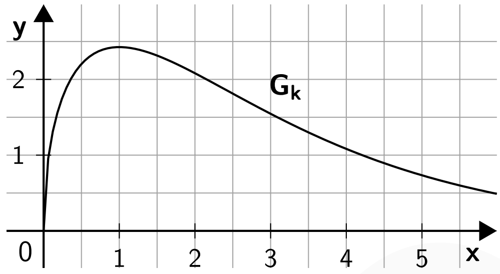
1.1 Das Rotationsvolumen ergibt sich nach folgender Formel. Zur Lösungsfindung wird partiell integriert.
(Hinweis: Integral des Typs „Abräumer"; durch mehrmaliges partielles Integrieren verschwindet im Integral das Polynom als Faktor)

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_{-4}^{1} (k(x))^2 dx \\
&= \pi \cdot \int_{-4}^{1} (x-2)^2 \cdot e^{2x} dx \\
&= \pi \cdot \left(\left[(x-2)^2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} \right]_{-4}^{1} - \int_{-4}^{1} 2(x-2) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} dx \right) \\
&= \pi \cdot \left(\left[(x-2)^2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} \right]_{-4}^{1} - \left(\left[(x-2) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} \right]_{-4}^{1} - \int_{-4}^{1} 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} dx \right) \right) \\
&= \pi \cdot \left(\left[(x-2)^2 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - (x-2) \cdot \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} \right]_{-4}^{1} \right) \\
&= \pi \cdot \left((1-2)^2 \cdot \frac{1}{2}e^{2\cdot 1} - (1-2) \cdot \frac{1}{2}e^{2\cdot 1} + \frac{1}{4}e^{2\cdot 1} - \right. \\
&\qquad \left. \left((-4-2)^2 \cdot \frac{1}{2}e^{2\cdot(-4)} - (-4-2) \cdot \frac{1}{2}e^{2\cdot(-4)} + \frac{1}{4}e^{2\cdot(-4)} \right) \right) \\
&= \pi \cdot \left(\frac{1}{2}e^2 - (-1)\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{4}e^2 - \left(36 \cdot \frac{1}{2}e^{-8} - (-6) \cdot \frac{1}{2}e^{-8} + \frac{1}{4}e^{-8} \right) \right) \\
&= \pi \cdot \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{85}{4}e^{-8} \right) \\
&\approx \underline{\underline{29{,}0\,[VE]}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 16 - Rotation um die x-Achse: FOS13 MT 2018, AI 3

1 Gegeben ist die Funktion $k\colon x \mapsto 4\sqrt{x} \cdot e^{-0{,}5x}$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}_0^+$. Ein Ausschnitt ihres Graphen G_k ist in der nebenstehenden Abbildung zu sehen. Bei der Rotation des Graphen von k um die x-Achse entsteht ein unendlich ausgedehnter Drehkörper. Berechnen Sie die Maßzahl seines Volumens.

5 BE



Lösungsvorschlag A16 Rotation um die x-Achse: FOS13 MT 2018, AI 3

1 Das Rotationsvolumen berechnet sich nach allgemeiner Formel wie folgt. Das Integral wird dabei zunächst mittels partieller Integration gelöst und später die Grenzwertbetrachtung $b \to \infty$ durchgeführt.

$$\begin{aligned} V(b) &= \int_0^b (k(x))^2 dx = \int_0^b 16 \cdot x \cdot e^{-x} dx = 16 \cdot \left([x \cdot e^{-x} \cdot (-1)]_0^b - \int_0^b -e^{-x} dx \right) \\ &= 16 \cdot \left([-xe^{-x}]_0^b + \int_0^b e^{-x} dx \right) = 16 \cdot \left(-be^{-b} - 0 + [-e^{-x}]_0^b \right) \\ &= 16 \cdot \left(-be^{-b} - e^{-b} - (-e^0) \right) = 16 \cdot \left(-be^{-b} - e^{-b} + 1 \right) \end{aligned}$$

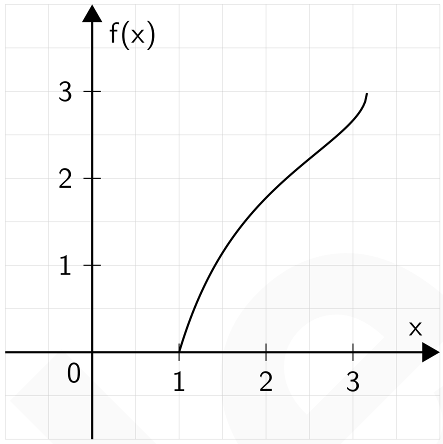
Nun kann die Grenzwertbetrachtung durchgeführt werden:

$$b \to \infty: \ V(b) = \pi \cdot \int_0^b (k(x))^2 dx = 16\pi \cdot \left(\underbrace{-be^{-b}}_{\to 0,\text{ da e-Fkt. dom.}} - \underbrace{e^{-b}}_{\to 0} + 1 \right) \to \underline{\underline{16\pi}}\,[VE]$$

Aufgabe 17 - Rotation um die y-Achse: FOS13 MT 2017, AI 3

1 Für die maschinelle Herstellung von Pralinen wird eine Gussform gebaut. Die Gussform entsteht als rotationssymmetrischer Körper, der durch Rotation des Graphen der Funktion $f\colon x \mapsto \frac{3x-\sqrt{10-x^2}}{x}$, $x \in [1; \sqrt{10}]$ um die y-Achse entsteht, wobei x in cm gemessen wird. Auf eine Mitführung der Einheiten wird verzichtet.

Berechnen Sie das Volumen V(b) einer Praline, wenn die Gussform von den Geraden mit den Gleichungen $y = 0$ und $y = b$ begrenzt wird, sowie V(3) auf zwei Nachkommastellen genau. **8 BE**



Lösungsvorschlag A17 Rotation um die y-Achse: FOS13 MT 2017, AI 3

1 **Ermitteln der Umkehrfunktion**

Die Form entsteht durch Rotation des Graphen $f(x)$ um die y-Achse. Da Rotationsvolumen aber von Körpern bestimmt werden, die um die x-Achse rotieren, wird zunächst die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ ermittelt, indem in der gegebenen Funktionsgleichung y und x getauscht werden und wieder nach y umgeformt wird. Dabei genügt es hier die Gleichung nach y^2 aufzulösen, da dies der Ausdruck ist, der für die Berechnung des Rotationsvolumens benötigt wird:

$$\begin{aligned}
& & x &= \frac{3y-\sqrt{10-y^2}}{y} & & |\cdot y \\
&\iff & xy &= 3y-\sqrt{10-y^2} & & |-3y \\
&\iff & y(x-3) &= -\sqrt{10-y^2} & & |^2 \\
&\iff & y^2(x-3)^2 &= 10-y^2 & & |+y^2 \\
&\iff & y^2(x-3)^2+y^2 &= 10 & & \\
&\iff & y^2((x-3)^2+1) &= 10 & & |:((x-3)^2+1) \\
&\iff & y^2 &= \frac{10}{(x-3)^2+1} & &
\end{aligned}$$

Ermitteln der Volumens V(b)

Die Integrationsgrenzen ergeben sich entsprechend zu $x = 0$ und $x = b$. Das Integral wird zunächst unbestimmt mithilfe der Substitution $z = x-3$ mit $dz = dx$ gelöst:

$$\int (f^{-1})^2 dx = \int \frac{10}{(x-3)^2+1} dx = 10\int \frac{1}{z^2+1} dz = 10\arctan(z) + C = 10\arctan(x-3) + C$$

Es ist $C \in \mathbb{R}$. Damit kann das Volumen einer Praline bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
V(b) &= \pi \int_0^b (f^{-1})^2 dx = \pi \int_0^b \frac{10}{(x-3)^2+1} dx = 10\pi \left[\arctan(x-3)\right]_0^b \\
&= \underline{\underline{10\pi(\arctan(b-3) - \arctan(-3))\ [VE]}}
\end{aligned}$$

Berechnen des Wertes V(3)

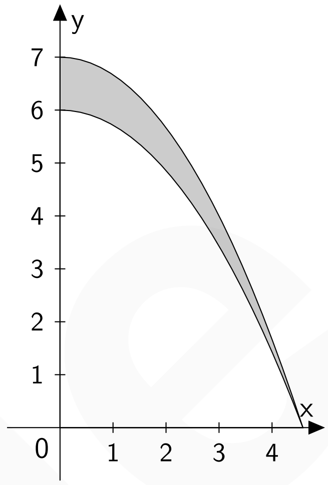
Für $b = 3$ ergibt sich zudem folgendes Volumen:

$$\begin{aligned}
V(3) &= 10\pi(\arctan(3-3) - \arctan(-3)) = 10\pi(\arctan(0) - \arctan(-3)) \\
&= 10\pi\arctan(3) \approx \underline{\underline{39{,}24\ [VE]}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 18 - Rotation um die y-Achse: FOS13 MT 2018, AII 2

1 Für eine Lampe wird eine parabelförmig begrenzte Abdeckung aus Acrylglas benötigt (Dichte von Acrylglas: $\rho = 1{,}18\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$).

Das Musterstück entsteht als Rotationskörper des in der nebenstehenden Abbildung dargestellten Flächenstücks, das von den Graphen der beiden Funktionen p_1 und p_2 mit $p_1(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 7$ und $p_2(x) = -\frac{2}{7}x^2 + 6$ für $0 \leq x \leq \sqrt{21}$ im I. Quadranten begrenzt wird, bei der Rotation um die y-Achse. Eine Längeneinheit beträgt 1 cm.



Ermitteln Sie die Masse der Abdeckung. **7 BE**

Lösungsvorschlag A18 Rotation um die y-Achse: FOS13 MT 2018, AII 2

1 **Bestimmen der Umkehrfunktionen**
Da eine Rotation um die y-Achse betrachtet wird, müssen zunächst die Terme der Umkehrfunktionen der beiden Parabeln gefunden werden, indem man jeweils nach x umformt:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= -\frac{1}{3}x^2+7 \\ \Longleftrightarrow \quad y &= -\frac{1}{3}x^2+7 && \mid -7 \\ \Longleftrightarrow \quad y-7 &= -\frac{1}{3}x^2 && \mid \cdot(-3) \\ \Longleftrightarrow \quad x^2 &= -3(y-7) && \mid \sqrt{\ } \\ \Longleftrightarrow \quad x &= \pm\sqrt{3(7-y)} \\ \Longleftrightarrow \quad p_1^{-1}(x) &= \sqrt{3(7-x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= -\frac{2}{7}x^2+6 \\ \Longleftrightarrow \quad y &= -\frac{2}{7}x^2+6 && \mid -6 \\ \Longleftrightarrow \quad y-6 &= -\frac{2}{7}x^2 && \mid \cdot(-3{,}5) \\ \Longleftrightarrow \quad x^2 &= -3{,}5(y-6) && \mid \sqrt{\ } \\ \Longleftrightarrow \quad x &= \pm\sqrt{3{,}5(6-y)} \\ \Longleftrightarrow \quad p_2^{-1}(x) &= \sqrt{3{,}5(6-x)} \end{aligned}$$

Da die Umkehrfunktion für positive Werte gesucht ist, entfällt jeweils die Lösung mit negativem Vorzeichen.

Berechnen des Rotationsvolumens
Aus der Differenz kann nun das Rotationsvolumen bestimmt werden. Die jeweiligen Integrationsgrenzen sind dabei an der y-Achse abzulesen:

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^7 (p_1^{-1})^2 dx - \pi \cdot \int_0^6 (p_2^{-1})^2 dx = \pi \left(\int_0^7 3(7-x)dx - \int_0^6 3{,}5(6-x)dx \right) \\ &= \pi \left(\left[21x-1{,}5x^2\right]_0^7 - \left[21x-1{,}75x^2\right]_0^6 \right) = \pi \left(21\cdot 7-1{,}5\cdot 7^2-0-(21\cdot 6-1{,}75\cdot 6^2-0)\right) \\ &= 10{,}5\pi\,[\text{cm}^3] \end{aligned}$$

Ermitteln der Masse der Abdeckung
Aus dem Volumen und der Dichte kann schließlich die Masse der Abdeckung ermittelt werden:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Longleftrightarrow \quad m = \rho \cdot V = 1{,}18\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 10{,}5\pi\,\text{cm}^3 \approx \underline{\underline{38{,}92\,\text{g}}}$$

Aufgabe 19 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2014, AI 3

1 Bestimmen Sie für $x > 1$ die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$x \cdot \ln(x) \cdot y' + y = \ln(x)$
mit der Methode der Variation der Konstanten. **8 BE**

Lösungsvorschlag A19 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2014, AI 3

1 Gegeben ist die inhomogene DGL: $x \cdot \ln(x) \cdot y' + y = \ln(x)$ mit $x > 1$.

Zunächst wird die Gleichung in die Grundform umgestellt:

$$\begin{aligned} & x \cdot \ln(x) \cdot y' + y = \ln(x) && \mid : (x \cdot \ln(x)) \; [\neq 0] \\ \Longleftrightarrow \quad & y' + \frac{y}{x \cdot \ln(x)} = \frac{1}{x} && \end{aligned}$$

Entsprechend lautet die Gleichung der homogenen DGL:

$$y' + \frac{1}{x \cdot \ln(x)} y = 0$$

Mittels Trennung der Variablen wird nun zunächst die Lösung der homogenen DGL bestimmt:

$$\begin{aligned} & y' + \frac{1}{x \cdot \ln(x)} y = 0 && \mid - \frac{1}{x \cdot \ln(x)} y \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x \cdot \ln(x)} y && \mid : y \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x \cdot \ln(x)} && \mid \cdot dx \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{dy}{y} = -\frac{1}{x \cdot \ln(x)} \cdot dx && \\ \Longleftrightarrow \quad & \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx && \\ \Longleftrightarrow \quad & \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx && \\ \Longleftrightarrow \quad & \ln|y| = -\ln(\ln(x)) + \tilde{C} && \mid \exp(\;) \\ \Longleftrightarrow \quad & |y| = e^{-\ln(\ln(x))} \cdot e^{\tilde{C}} && \\ \Longleftrightarrow \quad & |y| = e^{-\ln(\ln(x))} \cdot C && \\ \Longleftrightarrow \quad & |y| = \frac{1}{\ln(x)} \cdot C && \end{aligned}$$

Dabei sind $\tilde{C}, C \in \mathbb{R}$. Da die Integrationskonstante C im Vorzeichen variabel wählbar ist, können die Betragsstriche von $|y|$ im Folgenden vernachlässigt werden:

$$y_h = C \cdot \frac{1}{\ln(x)}$$

Mithilfe der Variation der Konstanten wird nun eine spezielle Lösung ermittelt.

Ansatz: $y = C(x) \cdot \frac{1}{\ln(x)}$

$$\Rightarrow \quad y' = C'(x) \cdot \frac{1}{\ln(x)} + C(x) \cdot \frac{-1}{(\ln(x))^2} \cdot \frac{1}{x} = C'(x) \cdot \frac{1}{\ln(x)} - C(x) \cdot \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2}$$

Die ermittelten Ausdrücke für y und y′ können nun in die umgeformte Grundform der inhomogenen DGL eingesetzt werden:

$$C'(x) \cdot \frac{1}{\ln(x)} - C(x) \cdot \frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2} + C(x) \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln(x)} = \frac{1}{x}$$

Im Folgenden wird dieser Ausdruck zunächst vereinfacht und weiter umgeformt. Das Integral wird mithilfe der Substitution $q = \ln(x)$ und $dx = x \cdot dq$ gelöst.

$$\begin{aligned}
& & C'(x) \cdot \frac{1}{\ln(x)} &= \frac{1}{x} & & | \cdot \ln(x) \\
&\Longleftrightarrow & C'(x) &= \frac{\ln(x)}{x} & & \\
&\Longleftrightarrow & C(x) &= \int \frac{\ln(x)}{x} dx & & \text{(Substituieren)} \\
&\Longleftrightarrow & C(x) &= \int q dq & & \\
&\Longleftrightarrow & C(x) &= \frac{q^2}{2} + D & & \text{(Rücksubstituieren)} \\
&\Longleftrightarrow & C(x) &= \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + D & & \text{(Wähle } D = 0) \\
&\Longleftrightarrow & C(x) &= \frac{1}{2}(\ln(x))^2 & & \\
&\Rightarrow & y_s &= \frac{1}{2}(\ln(x))^2 \cdot \frac{1}{\ln(x)} & & \\
&\Longleftrightarrow & y_s &= \frac{1}{2}\ln(x) & &
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}
y &= y_h + y_s \\
&= \underline{\underline{C \cdot \frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{2}\ln(x)}} \quad \text{mit } C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Aufgabe 20 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2015, AI 4

1 Gegeben ist die separierbare Differenzialgleichung
$y' \cdot (x^2-1) = (x-3) \cdot \dfrac{y^2+2}{2y}$ mit $x > 1$ und $y > 0$.

Bestimmen Sie die Lösung der Differenzialgleichung, deren Graph durch den Punkt $P\left(2 \middle| \sqrt{7}\right)$ verläuft. **9 BE**

Lösungsvorschlag A20 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2015, AI 4

2 Zunächst wird die Differentialgleichung umgeformt um die Variablen zu trennen:

$$\begin{aligned}
& y' \cdot (x^2-1) = (x-3) \cdot \frac{y^2+2}{2y} && |:(x^2-1)\\
\iff\quad & \frac{dy}{dx} = \frac{x-3}{x^2-1} \cdot \frac{y^2+2}{2y} && \Big| \cdot \frac{2y}{y^2+2}\\
\iff\quad & \frac{2y}{y^2+2}\frac{dy}{dx} = \frac{x-3}{x^2-1} && | \cdot dx\\
\iff\quad & \frac{2y}{y^2+2}dy = \frac{x-3}{x^2-1}dx\\
\iff\quad & \int \frac{2y}{y^2+2}dy = \int \frac{x-3}{x^2-1}dx
\end{aligned}$$

Als Ansatz zur Lösung wird dabei eine Partialbruchzerlegung des rechten Integranden vorgenommen. Es muss ein A und B so gefunden werden, dass

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

gilt. Bildet man weiterhin den Hauptnenner gilt:

$$\frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

Im Vergleich beider Seiten muss nun also $x-3 = A(x-1)+B(x+1)$ erfüllt sein. Einsetzen von $x = 1$:

$$\begin{aligned}
& x-3 = A(x-1)+B(x+1)\\
\iff\quad & 1-3 = A(1-1)+B(1+1)\\
\iff\quad & -2 = 2B && |:(-2)\\
\iff\quad & B = -1
\end{aligned}$$

Einsetzen von $x = -1$:

$$x-3 = A(x-1)+B(x+1)$$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad -1-3 &= A(-1-1)+B(-1+1) \\
\Longleftrightarrow \quad -4 &= -2A && |:(-2) \\
\Longleftrightarrow \quad A &= 2
\end{aligned}
$$

Es gilt also:

$$\frac{x-3}{x^2-1} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}$$

Oben eingesetzt folgt weiterhin:

$$
\begin{aligned}
& \int \frac{2y}{y^2+2}dy = \int \frac{x-3}{x^2-1}dx \\
\Longleftrightarrow \quad & \int \frac{2y}{y^2+2}dy = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) dx \\
\Longleftrightarrow \quad & \ln|y^2+2| = 2\cdot\ln|x+1| - \ln|x-1| + C && \text{(Beträge entfallen (s. unten))} \\
\Longleftrightarrow \quad & \ln(y^2+2) = 2\cdot\ln(x+1) - \ln(x-1) + C \\
\Longleftrightarrow \quad & \ln(y^2+2) = \ln((x+1)^2) - \ln(x-1) + C \\
\Longleftrightarrow \quad & \ln(y^2+2) = \ln\left(\frac{(x+1)^2}{x-1}\right) + C && |\exp(\ ) \\
\Longleftrightarrow \quad & e^{\ln(y^2+2)} = e^{\ln\left(\frac{(x+1)^2}{x-1}\right)+C} \\
\Longleftrightarrow \quad & y^2+2 = \frac{(x+1)^2}{x-1}\cdot e^C \\
\Longleftrightarrow \quad & y^2+2 = \frac{(x+1)^2}{x-1}\cdot D && |-2 \\
\Longleftrightarrow \quad & y^2 = \frac{(x+1)^2}{x-1}\cdot D - 2
\end{aligned}
$$

Dabei ist $C,D \in \mathbb{R}$. Die Beträge können weggelassen werden, da laut Angabe $x > 1$ und $y > 0$ ist, und somit alle Terme in Betragsstrichen nicht negativ sind. Um D zu bestimmen werden nun die Koordinaten des gegebenen Punktes P eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
y^2 &= \frac{(x+1)^2}{x-1}\cdot D - 2 \\
\Longleftrightarrow \quad \sqrt{7}^2 &= \frac{(2+1)^2}{2-1}\cdot D - 2 \\
\Longleftrightarrow \quad 7 &= 9\cdot D - 2 && |+2 \\
\Longleftrightarrow \quad 9 &= 9D && |:9 \\
\Longleftrightarrow \quad D &= 1
\end{aligned}
$$

Damit folgt:

$$y^2 = \frac{(x+1)^2}{x-1}\cdot D - 2$$

$$\Longleftrightarrow \quad y^2 = \frac{(x+1)^2}{x-1} - 2 \qquad |\sqrt{}$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x-1} - 2} \qquad (\text{„-" entfällt, da } y > 0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{y = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{x-1} - 2}}}$$

Aufgabe 21 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2015, AII 3

1 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $y' + \frac{2x+1}{x+1}y = (x^2-1)\cdot e^x$ mit $x > -1$ mit der Methode der Variation der Konstanten. **11 BE**

Lösungsvorschlag A21 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2015, AII 3

1 Es wird zunächst eine Lösung der homogenen DGL gesucht:

$$
\begin{aligned}
& & y' + \frac{2x+1}{x+1}y &= 0 & &\Big| -\frac{2x+1}{x+1}y \\
&\Longleftrightarrow & \frac{dy}{dx} &= -\frac{2x+1}{x+1}y & &\Big| :y \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= -\frac{2x+1}{x+1} & &\Big| \cdot dx \\
&\Longleftrightarrow & \frac{dy}{y} &= -\frac{2x+1}{x+1}dx
\end{aligned}
$$

Der Term auf der rechten Seite der Gleichung kann dabei wie folgt umgeformt werden:

$$-\frac{2x+1}{x+1} = -\frac{2x+1+1-1}{x+1} = -\frac{2(x+1)-1}{x+1} = -2 + \frac{1}{x+1}$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{dy}{y} &= \left(-2 + \frac{1}{x+1}\right) dx \\
&\Longleftrightarrow & \int \frac{dy}{y} &= \int \left(-2 + \frac{1}{x+1}\right) dx \\
&\Longleftrightarrow & \ln|y| &= -2x + \ln(x+1) + \tilde{D} & &\Big| \exp(\ ) \\
&\Longleftrightarrow & |y| &= e^{-2x+\ln(x+1)+\tilde{D}} \\
&\Longleftrightarrow & |y| &= e^{-2x}\cdot e^{\ln(x+1)}\cdot e^{\tilde{D}} \\
&\Longleftrightarrow & y_h &= e^{-2x}\cdot(x+1)\cdot D
\end{aligned}
$$

Dabei ist $\tilde{D}, D \in \mathbb{R}$. Es kann nun die Variation der Konstanten erfolgen, bei der man bei der Ableitung annimmt, dass D ebenfalls von x abhängig ist um eine spezielle Lösung zu finden:

$$
\begin{aligned}
\text{Ansatz:}\quad & y = D(x)\cdot(x+1)\cdot e^{-2x} \\
\Rightarrow\quad & y' = D'(x)\cdot(x+1)\cdot e^{-2x} + D(x)\cdot\left(e^{-2x} + (x+1)(-2)e^{-2x}\right) \\
& = D'(x)\cdot(x+1)\cdot e^{-2x} + D(x)\cdot e^{-2x}\cdot(-2x-1)
\end{aligned}
$$

Die Terme von y und y′ können nun in die inhomogene DG eingesetzt werden:

$$(x^2-1)\cdot e^x = D'(x)\cdot(x+1)\cdot e^{-2x} + D(x)\cdot e^{-2x}\cdot(-2x-1) + \frac{2x+1}{x+1}\cdot D(x)\cdot(x+1)\cdot e^{-2x}$$

$$\iff \quad D'(x) = \frac{(x^2-1)\cdot e^x}{(x+1)\cdot e^{-2x}} = \frac{(x+1)(x-1)\cdot e^x}{(x+1)\cdot e^{-2x}}$$
$$\iff \quad D'(x) = (x-1)\cdot e^{3x}$$

Dieser Ausdruck kann nun mithilfe partieller Integration integriert werden:

$$\begin{aligned}
D(x) &= \int (x-1)\cdot e^{3x}dx \\
&= (x-1)\cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}\cdot e^{3x}dx \\
&= x\frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{9}\cdot e^{3x} + C \\
&= \frac{1}{3}\left(x-\frac{4}{3}\right)\cdot e^{3x} + C & \text{(Wähle } C=0\text{)} \\
&= \frac{1}{3}\left(x-\frac{4}{3}\right)\cdot e^{3x} \\
\Rightarrow y_s &= e^{-2x}\cdot(x+1)\cdot\frac{1}{3}\left(x-\frac{4}{3}\right)\cdot e^{3x} \\
&= \frac{1}{3}e^x\cdot(x+1)\cdot\left(x-\frac{4}{3}\right)
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich nun aus der homogenen und der speziellen Lösung:

$$\begin{aligned}
y &= y_h + y_s \\
&= e^{-2x}\cdot(x+1)\cdot D + \frac{1}{3}e^x\cdot(x+1)\cdot\left(x-\frac{4}{3}\right) \\
&= \underline{\underline{(x+1)\cdot\left(D\cdot e^{-2x} + \frac{1}{3}\cdot e^x\cdot\left(x-\frac{4}{3}\right)\right)}} \quad \text{mit } D\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

Aufgabe 22 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2016, AI 4

1 Gegeben ist die separierbare Differenzialgleichung
$(x^2-4) \cdot y' = 4y^2$ mit $x > 2$ und $y > 0$.
Bestimmen Sie die Lösung der Differenzialgleichung mit $y(3) = \frac{1}{\ln(5)}$. **6 BE**

Lösungsvorschlag A22 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2016, AI 4

1 Die gegebene DGL wird zunächst mithilfe der Trennung der Variablen umgeformt:

$$\begin{aligned}
& & (x^2-4) \cdot y' &= 4y^2 & \\
&\Longleftrightarrow & (x^2-4) \cdot \frac{dy}{dx} &= 4y^2 & \mid : (x^2-4) \\
&\Longleftrightarrow & \frac{dy}{dx} &= \frac{4y^2}{x^2-4} & \mid : y^2 \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} &= \frac{4}{x^2-4} & \mid \cdot dx \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{y^2}dy &= \frac{4}{x^2-4}dx & \\
&\Longleftrightarrow & \int \frac{1}{y^2}dy &= \int \frac{4}{x^2-4}dx &
\end{aligned}$$

Dabei werden zunächst beide Seiten der Gleichung explizit betrachtet:

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int y^{-2}dy = (-1) \cdot y^{-1} = -\frac{1}{y}$$

Die Integrationskonstante wird auf der rechten Seite der obigen Gleichung beachtet, kann hier also weggelassen werden. Für das Integral auf der rechten Seite der Gleichung werden zwei verschiedene Lösungsalternativen betrachtet:

1. Möglichkeit: Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{-4}{4-x^2}dx = -4 \cdot \int \frac{1}{4-x^2}dx$$

Um das Integral zu lösen nimmt man eine Partialbruchzerlegung des Integranden vor:

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{1+0x}{(2+x)(2-x)} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{2-x} = \frac{A(2-x)+B(2+x)}{(2+x)(2-x)} = \frac{2A+2B+x(B-A)}{(2+x)(2-x)}$$

Vergleicht man nun den zweiten und den fünften Term miteinander, so fällt auf, dass die Nennerterm gleich sind. Entsprechend müssen also auch die Zählerterm übereinstimmen. Dazu wird ein Koeffizientenvergleich vorgenommen (Vergleich der Koeffizienten vor x und ohne x jeweils auf beiden Seiten).

$$\text{(I)} \quad 1 = 2A + 2B$$

$$\text{(II)} \quad 0 = B - A \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = -A + B$$

Aus der unteren Zeile folgt $A = B$. Setzt man dies in Zeile (I) ein, folgt:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \qquad & 1 = 2A + 2B \\ \Longleftrightarrow \qquad & 1 = 4A \qquad \qquad | : 4 \\ \Longleftrightarrow \qquad & A = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Es ist also $A = B = \frac{1}{4}$. Damit gilt für den Integranden:

$$\frac{1}{4-x^2} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{2-x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\right)$$

Dies kann nun in obiges Integral eingesetzt werden, damit dieses schließlich gelöst werden kann:

$$\begin{aligned} -4 \cdot \int \frac{1}{4-x^2}dx &= -4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \int \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\right) dx = -\int \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\right) dx \\ &= -\left(\ln|2+x| - \ln|2-x|\right) + C = -\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + C \end{aligned}$$

Die gesamte Umformung ist zulässig, da laut Angabe $x > 2$ gelten muss (deswegen ändert sich auch das Vorzeichen von $|2-x|$).

2. Möglichkeit: Merkhilfe

Um das Integral mit der Merkhilfe zu lösen wird es zunächst etwas umgeformt:

$$\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{-4}{4-x^2}dx = -4\int \frac{1}{4-x^2}dx = -4\int \frac{1}{2^2-x^2}dx$$

Für Integrale dieses Typs gilt laut Merkhilfe:

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

Mit $a = 2$ gilt also:

$$\int \frac{4}{x^2-4}dx = -4\int \frac{1}{2^2-x^2}dx = -4 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C = -\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C$$

Da laut Angabe $x > 2$ ist der Nennerterm stets negativ. Löst man danach die Betragsstriche auf, ergibt sich die endgültige Lösung des Integrals:

$$-\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C = -\ln\left(-\frac{2+x}{2-x}\right) + C = -\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + C$$

Dieses Ergebnis kann nun in obige Gleichung eingesetzt werden (setze Konstante $-C = D$):

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int \frac{4}{x^2-4}dx$$

$$
\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow & -\frac{1}{y} &= -\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + C & &\mid \cdot (-1) \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{y} &= \ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + D & &\mid \cdot y \\
&\Longleftrightarrow & 1 &= y \cdot \left(\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + D\right) & &\mid : \left(\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + D\right) \\
&\Longleftrightarrow & y(x) &= \frac{1}{\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right) + D}
\end{aligned}
$$

Damit hat man die allgemeine Lösung der DGL erhalten. Gegeben ist zusätzlich noch die Nebenbedingung $y(3) = \frac{1}{\ln(5)}$. Einsetzen ergibt:

$$
\begin{aligned}
& & y(3) &= \frac{1}{\ln(5)} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{\ln\left(\frac{2+3}{3-2}\right) + D} &= \frac{1}{\ln(5)} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{\ln(5) + D} &= \frac{1}{\ln(5)} \\
&\Longleftrightarrow & D &= 0
\end{aligned}
$$

Die spezielle Lösung lautet also

$$
\underline{\underline{y = \frac{1}{\ln\left(\frac{2+x}{x-2}\right)}}}
$$

Aufgabe 23 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2018, AI 4

1 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$-(x+3)\cdot y' + y = \frac{x-5}{x+3} \quad \text{für } x > -3$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.
[Mögliches Teilergebnis: $y_h = D\cdot(x+3), D \in \mathbb{R}$] **9 BE**

Lösungsvorschlag A23 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2018, AI 4

1 Die gegebene inhomogene DGL muss zunächst umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & -(x+3)\cdot y' + y = \frac{x-5}{x+3} && \mid :(-(x+3)) \quad (\text{mit } x>-3) \\ \iff \quad & y' - \frac{y}{x+3} = -\frac{x-5}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

Davon ausgehend gilt dann für die homogene DGL:

$$\begin{aligned} & y' - \frac{y}{x+3} = 0 && \mid + \frac{y}{x+3} \\ \iff \quad & \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+3} && \mid \cdot dx \\ \iff \quad & dy = \frac{y}{x+3}\cdot dx && \mid : y \\ \iff \quad & \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+3} \\ \iff \quad & \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+3} \\ \iff \quad & \ln(|y|) = \ln(x+3) + \tilde{D} && \mid \exp(\ ) \quad (\text{mit } x>-3) \\ \iff \quad & |y| = e^{\ln(x+3)+\tilde{D}} \\ \iff \quad & |y| = e^{\ln(x+3)}\cdot e^{\tilde{D}} \\ \iff \quad & y_h = D\cdot(x+3) \end{aligned}$$

Es ist $D, \tilde{D} \in \mathbb{R}$. Der Betrag entfällt, da das Vorzeichen der Konstanten frei gewählt werden kann.
Nun kann die Variation der Konstanten erfolgen:

$$\begin{aligned} \text{Ansatz:} \quad & y = D(x)\cdot(x+3) \\ \Rightarrow \quad & y' = D'(x)\cdot(x+3) + D(x) \end{aligned}$$

Eingesetzt in die umgeformte inhomogene DGL gilt:

$$D'(x)\cdot(x+3) + D(x) - \frac{D(x)\cdot\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}} = -\frac{x-5}{(x+3)^2}$$

$$
\begin{aligned}
\iff \quad & D'(x)\cdot(x+3)+D(x)-D(x) = -\frac{x-5}{(x+3)^2} \\
\iff \quad & D'(x)\cdot(x+3) = -\frac{x-5}{(x+3)^2} \qquad |:(x+3) \quad (\text{mit } x>-3) \\
\iff \quad & D'(x) = -\frac{x-5}{(x+3)^3} \\
\iff \quad & D(x) = -\int \frac{x-5}{(x+3)^3}dx
\end{aligned}
$$

Um das Integral zu lösen wird folgende Substitution vorgenommen:

$$
z = x+3 \quad \iff \quad x = z-3 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 1 \quad \iff \quad dx = dz
$$

Damit gilt weiterhin:

$$
\begin{aligned}
& & D(x) &= -\int \frac{x-5}{(x+3)^2}dx \\
\text{Subst.:} & \iff & D(x) &= -\int \frac{z-3-5}{z^3}dz \\
& \iff & D(x) &= -\int \frac{z-8}{z^3}dz \\
& \iff & D(x) &= -\int \left(\frac{1}{z^2}-\frac{8}{z^3}\right)dz \\
& \iff & D(x) &= -\left(-\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}\right)+C \\
\text{Rücksubst.:} & \iff & D(x) &= \frac{1}{x+3}-\frac{4}{(x+3)^2}+C \qquad (\text{Wähle } C=0) \\
& \iff & D(x) &= \frac{1}{x+3}-\frac{4}{(x+3)^2}
\end{aligned}
$$

Eingesetzt ergibt sich eine spezielle Lösung:

$$
y_s = D(x)\cdot(x+3) = 1-\frac{4}{x+3} = \frac{x+3}{x+3}-\frac{4}{x+3} = \frac{x-1}{x+3}
$$

Aus der homogenen und der speziellen Lösung ergibt sich die allgemeine Lösung der DGL:

$$
\begin{aligned}
y &= y_h + y_s \\
&= D\cdot(x+3)+\frac{x-1}{x+3} \\
&= \underline{\underline{\frac{x-1}{x+3}+D\cdot(x+3)}} \quad \text{mit } D\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 24 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2018, AII 3

1 Gegeben ist die Differenzialgleichung $y' + \frac{x}{x^2+1} \cdot y = x$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mit der Methode der Variation der Konstanten.

[Mögliches Teilergebnis: $y_h = D \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, D \in \mathbb{R}$] **8 BE**

Lösungsvorschlag A24 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2018, AII 3

2 Zunächst muss die homogene Lösung der DGL bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
& & y' + \frac{x}{x^2+1}y &= 0 & & \left| -\frac{x}{x^2+1}y \right. \\
&\Longleftrightarrow & \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{x^2+1}y & & | \cdot dx \\
&\Longleftrightarrow & dy &= -\frac{x}{x^2+1}y \cdot dx & & | : y \\
&\Longleftrightarrow & \frac{dy}{y} &= -\frac{x}{x^2+1}dx \\
&\Longleftrightarrow & \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{x}{x^2+1}dx \\
&\Longleftrightarrow & \ln(|y|) &= -\frac{1}{2}\ln(|x^2+1|) + \tilde{D} \\
&\Longleftrightarrow & \ln(|y|) &= \ln((x^2+1)^{-\frac{1}{2}}) + \tilde{D} & & | \exp(\ ) \\
&\Longleftrightarrow & e^{\ln(|y|)} &= e^{\ln((x^2+1)^{-\frac{1}{2}})+\tilde{D}} \\
&\Longleftrightarrow & y &= ((x^2+1)^{-\frac{1}{2}}) \cdot e^{\tilde{D}} \\
&\Longleftrightarrow & y_h &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot D
\end{aligned}
$$

Dabei ist $\tilde{D}, D \in \mathbb{R}$. Der Betrag entfällt, da D im Vorzeichen beliebig gewählt werden kann. Es kann nun die Variation der Konstanten erfolgen:

$$
\begin{aligned}
\text{Ansatz:} \quad y &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot D(x) \\
\Rightarrow \quad y' &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot D'(x) - \frac{x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} \cdot D(x)
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in die inhomogene DGL folgt:

$$
\begin{aligned}
& & y' + \frac{x}{x^2+1} \cdot y &= x \\
&\Longleftrightarrow & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot D'(x) - \frac{x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}} \cdot D(x) + \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot D(x) &= x
\end{aligned}
$$

Auf der linken Seite der Gleichungen heben sich die zwei Summanden, die D(x) enthalten gegenseitig weg, sodass gilt:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot D'(x) &= x & \quad | \cdot \sqrt{x^2+1} \\
&\Longleftrightarrow & D'(x) &= x \cdot \sqrt{x^2+1} \\
&\Longleftrightarrow & D(x) &= \int x \cdot \sqrt{x^2+1} dx
\end{aligned}
$$

Um das Integral zu lösen wird folgende Substitution vorgenommen:

$$z = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 2x \quad \Longleftrightarrow \quad dx = \frac{dz}{2x}$$

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& & D(x) &= \int x \cdot \sqrt{x^2+1} dx \\
&\Longleftrightarrow & D(x) &= \int x \cdot \sqrt{z} \frac{dz}{2x} \\
&\Longleftrightarrow & D(x) &= \frac{1}{2} \int \sqrt{z} dz \\
&\Longleftrightarrow & D(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot z^{\frac{3}{2}} + C \\
&\Longleftrightarrow & D(x) &= \frac{1}{3} \sqrt{x^2+1}^3 + C & \quad (\text{Wähle } C = 0) \\
&\Longleftrightarrow & D(x) &= \frac{1}{3} \sqrt{x^2+1}^3
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich eine spezielle Lösung:

$$y_s = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot D = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{x^2+1}^3 = \frac{1}{3}(x^2+1)$$

Schließlich ergibt sich die allgemeine Lösung der gegebenen DGL:

$$y = y_h + y_s = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot D + \frac{1}{3}(x^2+1)}} \quad \text{mit } D \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 25 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2019, AI 3

1 Bestimmen Sie für die Differenzialgleichung $y' - 2 \cdot y = x \cdot e^x$ mit $x \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung mit der Methode der Variation der Konstanten. **8 BE**

Lösungsvorschlag A25 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2019, AI 3

1 Gegeben ist die inhomogene DGL $y' - 2y = x \cdot e^x$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Es wird zunächst die homogene DGL betrachtet und umgeformt:

$$\begin{aligned}
& y' - 2y = 0 && \mid +2y \\
\iff\quad & \frac{dy}{dx} = 2y && \mid \cdot dx \\
\iff\quad & dy = 2ydx && \mid : y \\
\iff\quad & \frac{dy}{y} = 2dx && \\
\iff\quad & \int \frac{1}{y}dy = \int 2dx && \\
\iff\quad & \ln(|y|) = 2x + C* && \mid \exp(\ ) \\
\iff\quad & y_h = e^{2x+C*} && \\
\iff\quad & y_h = e^{2x} \cdot C &&
\end{aligned}$$

Dabei ist $C, C* \in \mathbb{R}$. Mit der Variation der Konstanten ergibt sich dann eine spezielle Lösung:

$$\begin{aligned}
\text{Ansatz:}\quad & y = e^{2x} \cdot C(x) \\
\Rightarrow\quad & y' = e^{2x} \cdot 2 \cdot C(x) + e^{2x} \cdot C'(x)
\end{aligned}$$

Setzt man nun y und y' in die inhomogene DGL ein, folgt:

$$\begin{aligned}
& 2e^{2x} \cdot C(x) + e^{2x} \cdot C'(x) - 2 \cdot e^{2x} \cdot C(x) = x \cdot e^x && \\
\iff\quad & e^{2x} \cdot C'(x) = x \cdot e^x && \mid : e^{2x} \\
\iff\quad & C'(x) = x \cdot e^{-x} && \\
\iff\quad & C(x) = \int x \cdot e^{-x} dx &&
\end{aligned}$$

Dieses Integral wird mithilfe von partieller Integration gelöst:

$$\begin{aligned}
C(x) &= \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'} dx = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{(-e^{-x})}_{v} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx \\
&= -xe^{-x} - e^{-x} + D \qquad \text{(Wähle D=0)} \\
&= -xe^{-x} - e^{-x}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_s = e^{2x} \cdot C(x) = e^{2x} \cdot (-xe^{-x} - e^{-x}) = -xe^x - e^x$$

Für die allgemeine Lösung gilt dann:

$$\begin{aligned}
y &= y_h + y_s \\
&= \underline{\underline{e^{2x} \cdot C - xe^x - e^x}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 26 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2019, AII 3

1 Bestimmen Sie mit der Methode der Variation der Konstanten die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung
$x \cdot y' + y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ für $x > 0$.

[Mögliches Teilergebnis: $y_h = \frac{D}{x}$] **8 BE**

Lösungsvorschlag A26 - Differentialgleichung: FOS13 MT 2019, AII 3

1 Gegeben ist die inhomogene DGL

$$x \cdot y' + y = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Die DGL wird zunächst in die Grundform gebracht:

$$\begin{aligned} x \cdot y' + y &= \frac{1-x^2}{1+x^2} && \mid : x \\ \Longleftrightarrow \quad y' + \frac{y}{x} &= \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} \end{aligned}$$

Damit lautet die homogene DGL:

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

Weiterhin gilt dafür:

$$\begin{aligned} y' + \frac{y}{x} &= 0 && \mid -\frac{y}{x} \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x} && \mid \cdot dx \\ \Longleftrightarrow \quad dy &= -\frac{y}{x}dx && \mid : y \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x} \\ \Longleftrightarrow \quad \ln(|y|) &= -\ln(|x|) + C* \\ \Longleftrightarrow \quad y_h &= e^{-\ln(x)+C*} \\ \Longleftrightarrow \quad y_h &= C \cdot \left(e^{\ln(x)}\right)^{-1} \\ \Longleftrightarrow \quad y_h &= \frac{C}{x} \end{aligned}$$

Dabei ist $C, C* \in \mathbb{R}$. Die Betragsstriche um x entfallen, da laut Angabe $x > 0$ gegeben ist. Als Ansatz für die Variation der Konstanten gilt:

$$\text{Ansatz:} \quad y = \frac{C(x)}{x}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{C'(x)\cdot x - C(x)\cdot 1}{x^2} = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}$$

Einsetzen von y und y′ in die umgeformte inhomogene DGL führt zu einer speziellen Lösung.

$$\begin{aligned}
& \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} && \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{C'(x)}{x} = \frac{1-x^2}{x(1+x^2)} && \mid \cdot x \\
\Longleftrightarrow \quad & C'(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} && \\
\Longleftrightarrow \quad & C(x) = \int \frac{1-x^2}{1+x^2} dx && \\
\Longleftrightarrow \quad & C(x) = \int -\frac{x^2-1}{x^2+1} dx && \\
\Longleftrightarrow \quad & C(x) = -\int \frac{x^2+1-2}{x^2+1} dx && \\
\Longleftrightarrow \quad & C(x) = -\int \left(1 - \frac{2}{x^2+1}\right) dx && \\
\Longleftrightarrow \quad & C(x) = -x + 2\cdot \arctan(x) + D && (\text{Wähle } D = 0) \\
\Longleftrightarrow \quad & C(x) = -x + 2\cdot \arctan(x) && \\
\Rightarrow \quad & y_s = \frac{C(x)}{x} && \\
\Longleftrightarrow \quad & y_s = -1 + \frac{2}{x}\cdot \arctan(x) &&
\end{aligned}$$

Damit gilt für die allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned}
y &= y_h + y_s \\
&= \underline{\underline{\frac{D}{x} - 1 + \frac{2}{x}\cdot \arctan(x)}}
\end{aligned}$$

ÜBUNGSTEIL Stochastik - FOS13 Technik

Aufgabe 1 - Original-Prüfung FOS12 MNT 2018 Stochastik-Teil SI

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Der Pizzalieferdienst „Happy-Pizza“ feiert sein 10-jähriges Firmenjubiläum und bietet dazu seine Pizzen in den Größen klein (K), normal (N) und XXL (X) zu besonders günstigen Preisen an. Ein Fünftel der Kunden entscheidet sich für die kleine Pizza und nur jeder zehnte Kunde für die XXL-Größe. Zu jeder Pizza kann man einen Salat (S) dazu bestellen.
Unabhängig von der Wahl der Pizza entscheiden sich 30 % für einen Salat.
Um die XXL-Pizza stärker zu bewerben bekommt man dazu gratis ein kleines Getränk (G) oder ein Dessert (D). Die Entscheidung für ein Dessert ist unabhängig davon, ob ein Salat bestellt wird.
Es ist bekannt, dass 1 % aller Kunden eine XXL-Pizza mit Salat und Dessert bestellen.
Eine Pizza-Aktionsbestellung eines zufällig ausgewählten Kunden wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse. **6 BE**

1.2 Es werden folgende Ereignisse definiert:
E_1: „Ein Kunde erhält ein Gratisgetränk.“
$E_2 = \{KS; NS; XSG; XSD\}$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an, formulieren Sie E_2 möglichst einfach in Worten und geben Sie seine Wahrscheinlichkeit an. **3 BE**

2.0 Von den in 1.0 angegebenen Bestellvarianten kostet die kleine Pizza 5 €, die Pizza in Normalgröße 7 € und die XXL-Variante 10 €. Ein Salat kostet 3 €. Die Zufallsgröße X beschreibt die Kosten pro Bestellung.

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und stellen Sie diese geeignet graphisch dar. **6 BE**

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Kosten pro Bestellung innerhalb der einfach Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. **5 BE**

3 Nach 1.0 beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine XXL-Pizza bestellt wird, $p = 0{,}1$.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, dass bei 50 Bestellungen
E_3: „genau 40 Kunden keine XXL-Pizza bestellen."
E_4: „mehr als 5 Kunden eine XXL-Pizza bestellen."
E_5: „mindestens 2 aber höchstens 8 Personen eine XXL-Pizza bestellen." **5 BE**

4 Marlene, Martin, Max, Michael und Moritz wählen jeweils ihre Lieblingspizza und bestellen gemeinsam bei „Happy-Pizza". Nach der Lieferung der 5 unterschiedlichen Pizzen sucht sich zunächst Marlene ihre vegetarische Pizza heraus. Anschließend wählen die vier Jungs nacheinander zufällig einen der übrigen, noch geschlossenen Pizzakartons aus. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit nun alle ihre bestellte Pizza erhalten. **2 BE**

5.0 Der Organisator der Werbeaktion aus 1.0 vermutet, dass aufgrund der Aktion mehr als 10 % XXL-Pizzen verkauft werden (Gegenhypothese). Zur Überprüfung der Vermutung wird ein Hypothesentest durchgeführt, der auf den nächsten 100 Pizzabestellungen beruht.

5.1 Geben Sie zu diesem Test die Testgröße und die Nullhypothese an und bestimmen Sie auf dem 5 %-Niveau den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. **5 BE**

5.2 Erklären Sie, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht. **2 BE**

6.0 Ein anderer Pizzalieferdienst bietet neben Pizzen auch noch Nudelgerichte (N) an. Aus Erfahrung weiß man, dass 28 % aller Kunden Nudelgerichte (N) bestellen, die Restlichen eine Pizza ($\overline{N}$). Bei 3 von 10 Bestellungen wird zusätzlich Salat (S) geordert und bei der Hälfte aller Bestellungen lediglich eine Pizza.

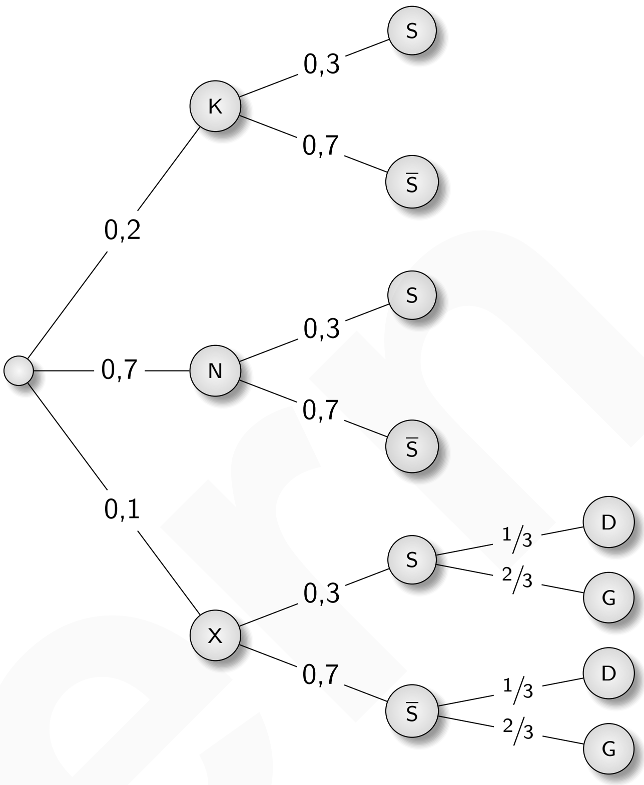
6.1 Bestimmen Sie mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kunde eine Pizza ($\overline{N}$) mit Salat (S) bestellt. **3 BE**

6.2 Zeigen Sie, dass für die Ereignisse N und S gilt: $P(N \cap S) \neq P(N) \cdot P(S)$. Deuten Sie das Ergebnis. **3 BE**

Lösungsvorschlag A1: Original-Prüfung FOS12 MNT 2018 Stochastik-Teil SI

1.0 Ermittlung aller Elementarereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten mithilfe eines Baumdiagramms.

1.1 **Wahrscheinlichkeit aller Elementarereignisse**
Aus den Angaben sind folgende Informationen zusammengefasst dargestellt.
Es werden die Pizzen (K), (N) und (X) angeboten. Dabei entscheidet sich ein fünftel der Kunden für (N) $\hat{=}$ 0,2, jeder zehnte Kunde für (X) $\hat{=}$ 0,1 und somit ist (K) $\hat{=}$ 0,7. Zu jeder Pizza kann man einen Salat (S) oder keinen Salat $\overline{S}$ bestellen. Die Kunden entscheiden sich unabhängig von der Pizzagröße für Salat (S) $\hat{=}$ 0,3 und somit ($\overline{S}$) $\hat{=}$ 0,7. Bei der Wahl einer Pizza (X) kann man ein Getränk (G) oder ein Dessert (D) auswählen.
Bekannt ist $P(\{X; S; D\}) = 0{,}01$.
Anmerkung: Die Struktur/der Aufbau des Baumdiagramms ist bei 1.2 unter E_2 ersichtlich.



$P(\{KS\}) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$

$P(\{K\overline{S}\}) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14$

$P(\{NS\}) = 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}21$

$P(\{N\overline{S}\}) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49$

$P(\{XSD\}) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot {}^1\!/_3 = 0{,}01$

$P(\{XSG\}) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot {}^2\!/_3 = 0{,}02$

$P(\{X\overline{S}D\}) = 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot {}^1\!/_3 = \frac{7}{300}$

$P(\{X\overline{S}G\}) = 0{,}1 \cdot 0{,}7 \cdot {}^2\!/_3 = \frac{7}{150}$

Nebenrechnung:

$$P(\{XSD\}) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot x = 0{,}01 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

1.2 **E_1 in aufzählender Mengenschreibweise**
Es werden alle Ereignisse aufgezählt, die ein Gratisgetränk beinhalten:

$$\underline{\underline{E_1 = \{XSG; X\overline{S}G\}}}$$

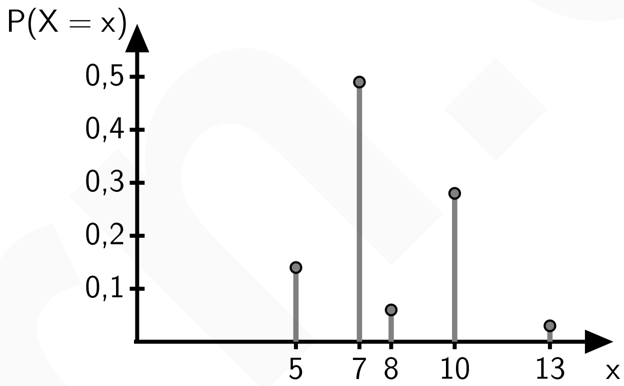
E_2 in Worten
E_2: „Ein Kunde bestellt Salat." mit $P(E_2) = 0{,}3$.

2.0 Bezogen auf die Bestellvarianten aus Aufgabe 1.0 wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und die Wahrscheinlichkeit innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert berechnet.

2.1 **Angabe Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X und die graphische Darstellung**
Der Kunde kann entscheiden welche Pizzagröße (K), (N) oder (X) er bestellen möchte. Sollte er einen Salat dazu bestellen, kostet der zu jeder Pizzagröße zusätzlich 3 €.
Somit entsteht für die Zufallsgröße X folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung.

	x	5	7	8	10	13
	$P(X = x)$	0,14	0,49	0,06	0,28	0,03
Hilfestellung	ω_i	$K\overline{S}$	$N\overline{S}$	KS	$NS; X\overline{S}G; X\overline{S}D$	$XSG; XSD$

Zur geeigneten graphischen Darstellung wird hier das Stabdiagramm gewählt.



2.2 **Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass die Kosten pro Bestellung innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen**
Zunächst werden der Erwartungswert, die Varianz und daraus die Standardabweichung berechnet:

$$\mu(X) = 5 \cdot 0{,}14 + 7 \cdot 0{,}49 + 8 \cdot 0{,}06 + 10 \cdot 0{,}28 + 13 \cdot 0{,}03 = 7{,}8$$

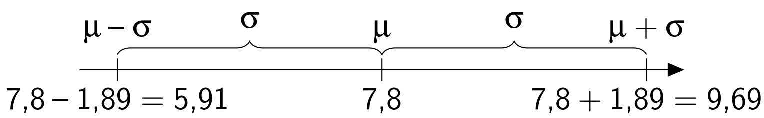
$$V(X) = 0{,}14 \cdot (5 - 7{,}8)^2 + 0{,}49 \cdot (7 - 7{,}8)^2 + 0{,}06 \cdot (8 - 7{,}8)^2 + 0{,}28 \cdot (10 - 7{,}8)^2 + 0{,}03 \cdot (13 - 7{,}8)^2 = 3{,}58$$

$$\sigma(X) = \sqrt{3{,}58} \approx \underline{1{,}89}$$

Es wird nun die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, dass die Werte höchstens die einfache Standardabweichung vom Erwartungswert abweichen:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(5{,}91 < X < 9{,}69) = P(X = 7) + P(X = 8) = \underline{\underline{0{,}55}}$$

Zur Veranschaulichung



3 **Berechnung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten**

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine XXL-Pizza bestellt wird, beträgt $p = 0{,}1$ und somit die Gegenwahrscheilichkeit $p = 0{,}9$ dass keine XXL-Pizza bestellt wird.

$\mathbf{E_3}$: „genau 40 Kunden keine XXl-Pizza bestellen."

$P(E_3) = P(X = 40) = B(50; 0{,}9; 40) \approx \underline{\underline{0{,}01518}}$ [Tafelwerk] oder als Alternative rechnerisch

$$= B(50; 0{,}9; 40) = \binom{50}{40} \cdot 0{,}9^{40} \cdot 0{,}1^{10} \approx \underline{\underline{0{,}01518}}$$

$\mathbf{E_4}$: „Es bestellen mehr als 5 Kunden eine XXL-Pizza, also sind es 6 bis 50 Kunden die eine XXL-Pizza bestellen."

$$P(X > 5) = P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \sum_{i=0}^{5} B(50; 0{,}10; i) = 1 - F_{0,1}^{50}(5)$$

$$\approx 1 - 0{,}61612 \approx \underline{\underline{0{,}38388}}$$

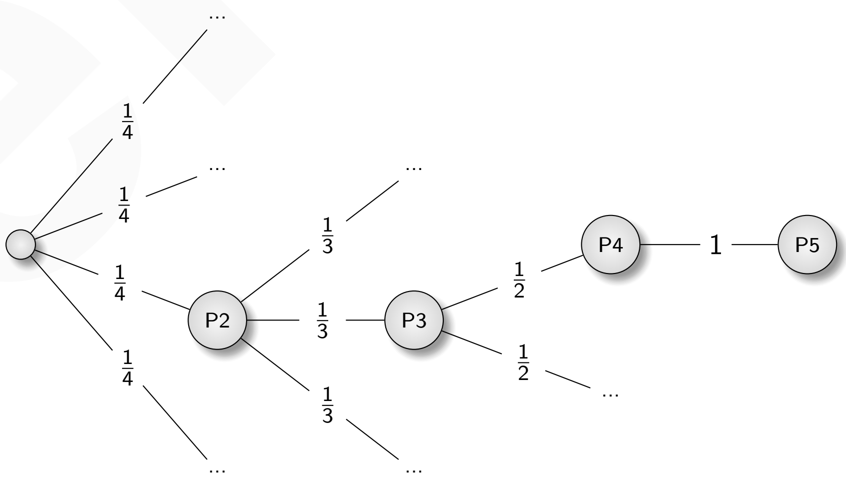
$\mathbf{E_5}$: „Mindestens 2 aber höchstens 8 Personen eine XXL-Pizza bestellen."

$$P(E_5) = P(2 \leq X < 9) = P(X \leq 8) - P(X \leq 1) = \sum_{i=0}^{8} B(50; 0{,}10; i) - \sum_{i=0}^{1} B(50; 0{,}10; i)$$

$$= F_{0,1}^{50}(8) - F_{0,1}^{50}(1) \approx 0{,}94213 - 0{,}03379 \approx \underline{\underline{0{,}90834}}$$

4 **Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass alle ihre bestellte Pizza erhalten**

Dieses Zufallsexperiment kann man sich auch in Form eines Baumdiagramms ohne zurücklegen vorstellen, sodass die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sichtbar werden. $P(E) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{24}$



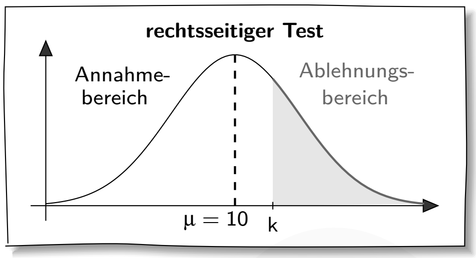
5.1 **Nullhypothese und Testgröße**

Testgröße T: Anzahl der verkauften XXL-Pizzen von 100 Pizzabestellungen.
Der Erwartungswert ($\mu = n \cdot p$) liegt bei $\mu = 100 \cdot 0{,}1 = 10$ Pizzabestellungen.

Größtmöglicher Ablehnungsbereich

Es gilt:

Nullhypothese	Gegenhypothese
$H_0 : p \leq 0{,}1$	$H_1 : p > 0{,}1$
Annahmebereich von H_0:	Ablehnungsbereich von H_0:
$A = \{0; ...; k-1\}$	$\overline{A} = \{k; k+1; ...; 100\}$



Anmerkung: k liegt immer im Ablehnungsbereich. Es handelt sich um einen rechtseitigen Hypothesentest, da der Anteil derjenigen, die eine XXL-Pizza bestellen, größer ist und k somit rechts vom Erwartungswert liegt (siehe Skizze).

Mit dem gegebenen Signifikanzniveau von 5 % gilt dann:

$$
\begin{aligned}
& & P(T \geq k) &\leq 0{,}05 & & \\
&\Longleftrightarrow & 1 - P(T \leq k-1) &\leq 0{,}05 & & |-1 \\
&\Longleftrightarrow & -P(T \leq k-1) &\leq -0{,}95 & & |\cdot(-1) \\
&\Longleftrightarrow & P(T \leq k-1) &\geq 0{,}95 & & \\
&\Longleftrightarrow & F_{0{,}10}^{100}(k-1) &\geq 0{,}95 & &
\end{aligned}
$$

Der gesuchte Wert $k-1$ kann dabei einem Tafelwerk in der rechten Spalte entnommen werden. Somit ist $k-1 = 15$, da hier der Prozentwert der Summe das erste Mal **größer** als 0,95 ist. Den größtmöglichen Ablehnungsbereich erhält man somit für $k = 16$. Er lautet $\underline{\underline{\overline{A} = \{16; ...; 100\}}}$.

5.2 **Erklären, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht**
Aufgrund des Tests wird angenommen, dass höchsten 10 % XXL-Pizzen verkauft werden, obwohl deren Anteil höher ist.

6.0 Über eine Vierfeldertafel werden die Wahrscheinlichkeiten und die stochastische Unabhängigkeit geprüft.

6.1 **Mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit bestimmen**
Es bestellen 28 % Nudelgerichte (N) und somit $\overline{N} \mathrel{\hat{=}} 0{,}72$. Bei 3 von 10 Bestellungen wird zusätzlich ein Salat (S) bestellt. Die Hälfte aller Bestellungen sind eine Pizza ohne Salat. Somit sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P(N) = 0{,}28, \quad P(\overline{N}) = 0{,}72, \quad P(S) = 0{,}3 \quad P(\overline{N} \cap \overline{S}) = 0{,}5$$

Damit ergibt sich die Vierfeldertafel wie folgt (gegebene Wahrscheinlichkeiten sind grau hinterlegt):

VFT mit rel. Häufigkeiten

	N	$\overline{N}$	$\sum$
S	0,08	0,22	0,3
$\overline{S}$	0,2	0,5	0,7
$\sum$	0,28	0,72	1

VFT mit abs. Häufigkeiten

	N	$\overline{N}$	$\sum$
S	0,8	2,2	3
$\overline{S}$	2	5	7
$\sum$	2,8	7,2	10

Alle Werte durch 10 teilen um auf die rel. Häufigkeiten zu kommen.

6.2 Prüfen auf stochastische Ab-/Unabhängigkeit

Anmerkung: Stoch. Unabhängigkeit gilt dann, wenn $P(E_1) \cdot P(E_2) = P(E_1 \cap E_2)$, ansonsten abhängig, das bedeutet, ob jemand Salat bestellt hängt davon ab, ob er ein Nudelgericht möchte.

Für die Ereignisse N und S gilt:

$$\begin{aligned} P(N \cap S) &= 0{,}08 \\ P(N) \cdot P(S) &= 0{,}28 \cdot 0{,}3 = 0{,}084 \\ P(N \cap S) &\neq P(N) \cdot P(S) \end{aligned}$$

Somit sind N und S stochastisch abhängig.

Aufgabe 2 - Original-Prüfung FOS12 MNT 2018 Stochastik-Teil SII

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Bei einem internationalen Fußballwettbewerb überlegt der Veranstalter schon im Vorfeld, aus welchen Gruppen sich die Besucher in den Stadien zusammensetzen. Man rechnet mit 60 % fanatische Anhänger (F) der jeweiligen Mannschaften. Die restlichen Besucher sind neutral (N). Die Hälfte aller Personen in den Stadien wird wohl Alkohol trinken (A). Ohne Alkoholgenuss geht man bei 2 % der Besucher von einer gewissen Gewaltbereitschaft (G) aus. Durch Alkoholgenuss verfünffacht sich diese Wahrscheinlichkeit. Sowohl der Alkoholgenuss als auch die Gewaltbereitschaft sind unabhängig von der Gruppenzugehörigkeit zu den Gruppen (F) oder (N).
Zu welcher der verschiedenen Kategorien eine beliebig herausgegriffene Person im Stadion zählt, wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse. **5 BE**

1.2 Es werden folgende Ereignisse definiert:
E_1: „Ein zufällig ausgewählter Besucher trinkt keinen Alkohol."
E_2: „Die Person ist fanatisch und friedlich oder neutral und gewaltbereit."
Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und prüfen Sie sie auf stochastische Unabhängigkeit.

1.3 Geben Sie in Mengenschreibweise ein Ereignis E_3 an, das unvereinbar mit E_1 ist und dessen Wahrscheinlichkeit 42 % von $P(E_1)$ beträgt. **2 BE**

2 Während der gesamten Spiele sind 400 Fußballer im Einsatz. 80 % von ihnen werden erfahrungsgemäß in Zweikämpfen in regelwidrigen Körperkontakt mit dem Gegner kommen (K). 180 Spieler bekommen eine gelbe Karte als Verwarnung (V), zwei Drittel davon im Zusammenhang mit einem unerlaubten Körperkontakt.
Stellen Sie für den beschriebenen Sachverhalt eine vollständige Vierfeldertafel auf, bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E_4 = \overline{K \cup \overline{V}}$ und interpretieren Sie E_4 im Sinne der vorliegenden Thematik. **5 BE**

3.0 Die Zufallsgröße X gibt die Tordifferenz bei den Spielergebnissen im Turnier an. Unter Vernachlässigung von Tordifferenzen größer als fünf ergibt sich mit den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,5	2b	a	5b-0,4	2a-0,24	0,02

3.1 Berechnen Sie die Parameter a und b, wenn $P(X \leq 2) = 0{,}84$ gilt, und stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm dar.
[Teilergebnis: $a = 0{,}14$] **7 BE**

3.2 Berechnen Sie mit den Werten für a und b aus Aufgabe 3.1, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. **5 BE**

4 Beim Elfmeterschießen erzielen die Spieler mit einer Wahrscheinlichkert von $p = 0{,}75$ tatsächlich ein Tor. Es werden nun 10 Elfmeter betrachtet.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_5: „Mehr als 3, aber weniger als 8 Schützen erzielen ein Tor.“
E_6: „Nur die ersten 4 oder nur die letzten 4 Elfmeter ergeben ein Tor.“
4 BE

5.0 Die Fehlerquote bei Entscheidungen der eingesetzten Schiedsrichter soll höchstens 12,5 % betragen. Bei einem der jüngeren Schiedsrichter vermutet man aber einen höheren Anteil (Gegenhypothese). In nächster Zeit werden deshalb 200 seiner Entscheidungen auf Fehler hin untersucht.

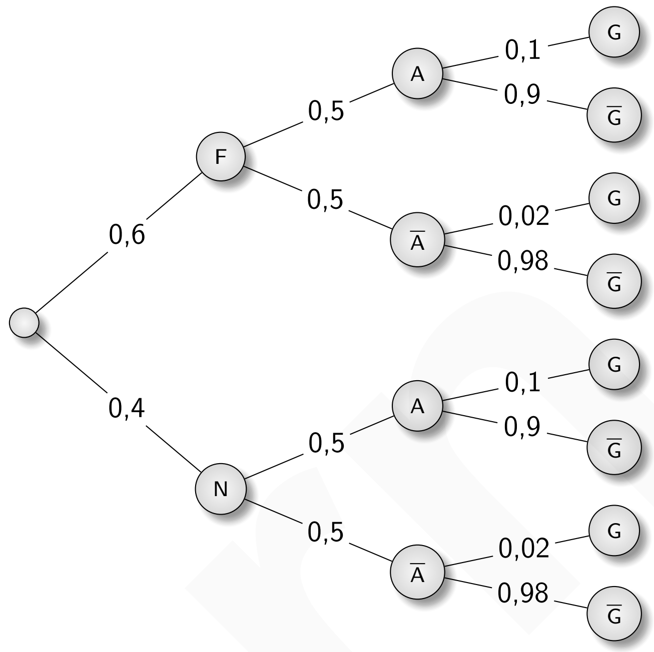
5.1 Geben Sie zu diesem Test Testgröße und Nullhypothese an und ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5 %-Niveau. **5 BE**

5.2 Erläutern Sie im Sachzusammenhang, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht. **2 BE**

Lösungsvorschlag A2: Original-Prüfung FOS12 MNT 2018 Stochastik-Teil SII

1.0 Ermittlung aller Elementarereignisse und deren Wahrscheinlichkeiten mithilfe eines Baumdiagramms. Für gegebene Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten angeben, sowie auf stoch. Unabhängigkeit prüfen. Prüfen auf Vereinbarkeit von Ereignissen.

1.1 **Wahrscheinlichkeit aller Elementarereignisse**
Aus den Angaben sind die Wahrscheinlichkeiten $P(F) = 0{,}6$, $PN) = 0{,}4$, $P(A) = 0{,}5$ gegeben. Entsprechend gilt für die Wahrscheinlichkeiten der jeweiligen Gegenereignisse: $P(\overline{D}) = 0{,}1$, $P(F) = 0{,}9$ und $P(E) = 0{,}8$. Durch Multiplikation der jeweiligen Pfadwahrscheinlichkeiten ergeben sich sich die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse:
Anmerkung: Die Struktur/der Aufbau des Baumdiagramms ist bei 1.20 unter E_2 ersichtlich.



$P(\{FAG\}) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$

$P(\{FA\overline{G}\}) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}27$

$P(\{F\overline{A}G\}) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}006$

$P(\{F\overline{A}\overline{G}\}) = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}98 = 0{,}294$

$P(\{NAG\}) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}02$

$P(\{NA\overline{G}\}) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}18$

$P(\{N\overline{A}G\}) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}004$

$P(\{N\overline{A}\overline{G}\}) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}98 = 0{,}196$

1.2 **E_1 und E_2 in aufzählender Mengenschreibweise**

Für E_1:
Es werden alle Ereignisse aufgezählt, bei denen ein zufällig ausgwählter Besucher keinen Alkohol trinkt.

$$\underline{\underline{E_1 = \{F\overline{A}G; F\overline{A}\overline{G}; N\overline{A}G; N\overline{A}\overline{G}\}}}$$
$$\Rightarrow P(E_1) = 0{,}5$$

Für E_2:
Es werden alle Ereignisse aufgezählt, bei denen die Personen fanatisch und friedlich oder neutral

und gewaltbereit ist.

$$\underline{\underline{E_2 = \{FA\overline{G}; F\overline{AG}; NAG; N\overline{A}G\}}}$$

$$\Rightarrow P(E_2) = 0{,}588$$

Prüfen ob E_1 und E_2 stoch. Unabhängig sind

Anmerkung: Stoch. Unabhängigkeit gilt dann, wenn $P(E_1) \cdot P(E_2) = P(E_1 \cap E_2)$, ansonsten abhängig.

Für die Ereignisse E_1 und E_2 gilt:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2) &= 0{,}298 \\ P(E_1) \cdot P(E_2) &= 0{,}5 \cdot 0{,}588 = 0{,}294 \\ P(E_1 \cap E_2) &\neq P(E_1) \cdot P(E_2) \end{aligned}$$

Somit sind E_1 und E_2 stochastisch abhängig.

1.3 **Die Mengenschreibweise von E_3 angeben, welche unvereinbar mit E_1 ist und 42 % von $P(E_1) = 0{,}5$ ist**

Somit ist $\underline{\underline{E_3 = \{FAG; NA\overline{G}\}}} = 0{,}18 + 0{,}03 = 0{,}21$.

$\Rightarrow P(E_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}42 = \underline{\underline{0{,}21}}$

2 **Mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit bestimmen**

Von 400 Fußballern kommen 80 % in einen regelwidrigen Körperkontakt (K). Somit gibt es bei 20 % keinen regelwidrigen Körperkontakt ($\overline{K}$). Es bekommen 180 Spieler eine gelbe Karte (V) und damit 220 keine gelbe Karte ($\overline{V}$). Zwei Drittel der der Spieler, die eine gelebe Karte bekommen, haben die gelbe Karte wegen einem regelwidrigen Körperkontakt erhalten. Somit sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P(K) = 0{,}8; \quad P(\overline{K}) = 0{,}2; \quad P(V) = 0{,}45; \quad P(\overline{V}) = 0{,}55; P(V \cap K) = 0{,}3$$

Damit ergibt sich die Vierfeldertafel wie folgt (gegebene Wahrscheinlichkeiten sind grau hinterlegt):

VFT mit rel. Häufigkeiten

	K	$\overline{K}$	$\sum$
V	0,3	0,15	0,45
$\overline{V}$	0,5	0,05	0,55
$\sum$	0,8	0,2	1

VFT mit abs. Häufigkeiten

	K	$\overline{K}$	$\sum$
V	120	60	180
$\overline{V}$	200	20	220
$\sum$	320	80	400

Alle Werte durch 400 teilen um auf die rel. Häufigkeiten zu kommen.

Über das De-Morgan-Gesetz und das Gesetz des doppelten Komplements gilt:

$$E_4 = \overline{K \cup \overline{V}} = \overline{K} \cap \overline{\overline{V}} = \overline{K} \cap V$$

Da in der Mengenlehre eine Vereinigung ($\cup$) in der Aussagenlogik einem Oder ($\vee$) entspricht, lautet die Beschreibung dieses Ereignisses in Worten: „Kein regelwidriger Körperkontakt, dennoch wird der Spieler mit einer gelben Karte verwarnt."

Wird in der Vierfeldertafel das entsprechende Ereignisse ($\overline{K} \cap V$) farblich markiert, so erkennt man leicht, welche Wahrscheinlichkeit sich ergibt (siehe Vierfeldertafel rechts $P(E_4) = 0{,}15$):

	K	$\overline{K}$	$\sum$
V	0,3	0,15	0,45
$\overline{V}$	0,5	0,05	0,55
$\sum$	0,8	0,2	1

3.0 Berechnung der Parameter in der angegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung, graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeitsverteilung mit einem Histogramm und Ermittlung der Wahrscheinlichkeit für die Zufallswerte von X, dass diese innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen.

3.1 Aus den Angaben können zwei Gleichungen gewonnen werden. Die erste Gleichung ergibt sich, da die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten 1 ergeben muss (Normierungsbedingung). Die Gleichung kann außerdem bereits so umgestellt werden, dass man einen Ausdruck für a in Abhängigkeit von b bekommt:

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad & 0{,}5 + 2b + a + 5b - 0{,}4 + 2a - 0{,}24 + 0{,}02 = 1 & \\
\Longleftrightarrow \quad & 3a + 7b - 0{,}12 = 1 & \mid +0{,}12 \\
\Longleftrightarrow \quad & 3a + 7b = 1{,}12 & \mid -7b \\
\Longleftrightarrow \quad & 3a = 1{,}12 - 7b & \mid :3 \\
\Longleftrightarrow \quad & a = \frac{28}{75} - \frac{7}{3}b &
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung erstellt man durch die Information, dass $P(X \leq 2) = 0{,}84$. Somit ergeben die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}84$.

$$\begin{aligned}
\text{(II)} \quad & 0{,}5 + 2b + a = 0{,}84 & \mid -0{,}5 \\
\Longleftrightarrow \quad & a + 2b = 0{,}34 & \mid -2b \\
\Longleftrightarrow \quad & a = 0{,}34 - 2b & \text{in (I) einsetzen} \\
\Rightarrow \quad & 3 \cdot (0{,}34 - 2b) = 1{,}12 - 7b & \\
\Longleftrightarrow \quad & 1{,}02 - 6b = 1{,}12 - 7b & \mid +7b \\
\Longleftrightarrow \quad & 1{,}02 + b = 1{,}12 & \mid -1{,}02 \\
\Longleftrightarrow \quad & b = 0{,}1 &
\end{aligned}$$

Setzt man $b = 0{,}1$ in (I) ein, wird der Wert für a bestimmt.

$$a = \frac{28}{75} - \frac{7}{3} \cdot 0{,}1$$

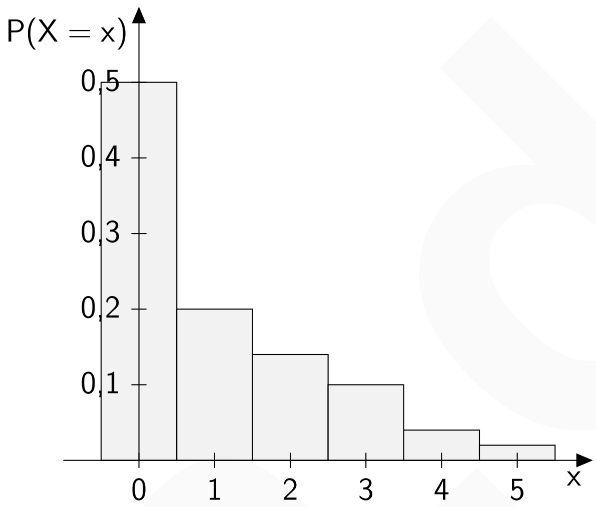
$$\iff \qquad a = \frac{28}{75} - \frac{7}{30}$$

$$\iff \qquad a = 0{,}14$$

Die gesuchten Werte sind $a = 0{,}14$ und $b = 0{,}1$. Damit lautet die Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x	0	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,5	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

Als Darstellung wird ein Histogramm erstellt:



3.2 **Mit den ermittelten Werten von a und b die Wahrscheinlichkeit der Zufallswerte von X berechnen, die innerhalb der einfachen Standardabweichung im den Erwartungswert liegen**

Zunächst werden der Erwartungswert, die Varianz und daraus die Standardabweichung berechnet:

$$\mu(X) = 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}14 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}04 + 5 \cdot 0{,}02 = 1{,}04$$

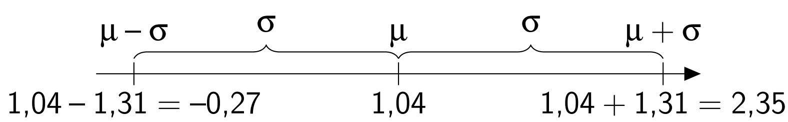
$$V(X) = 0{,}5 \cdot (0 - 1{,}04)^2 + 0{,}2 \cdot (1 - 1{,}04)^2 + 0{,}14 \cdot (2 - 1{,}04)^2 + 0{,}1 \cdot (3 - 1{,}04)^2 + 0{,}04 \cdot (4 - 1{,}04)^2 + 0{,}02 \cdot (5 - 1{,}04)^2 = 1{,}7184$$

$$\sigma(X) = \sqrt{1{,}7184} \approx \underline{1{,}31}$$

Es wird nun die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, dass die Werte <u>höchstens</u> die einfache Standardabweichung vom Erwartungswert abweichen:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(-0{,}27 < X < 2{,}35) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \underline{\underline{0{,}84}}$$

<u>**Zur Veranschaulichung**</u>



4 Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für angegebene Ereignisse

Für E_5: „Mehr als 3, aber weniger als 8 Schützen erzielen ein Tor."

$$\begin{aligned} P(E_5) &= P(3 < X < 8) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3) = F_{0,75}^{10}(7) - F_{0,75}^{10}(3) \\ &\approx 0{,}47441 - 0{,}00351 \approx \underline{\underline{0{,}47090}} \end{aligned}$$

Für E_6: „Nur die ersten 4 oder nur die letzten 4 Elfmeter ergeben ein Tor."

$$\begin{aligned} P(E_6) &= 2 \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^6 \\ &\approx \underline{\underline{0{,}00015}} \end{aligned}$$

5.0 Ermittlung der Testgröße und des Ablehnungsbereicht sowie Beschreibung des Fehlers 2. Art in diesem Sachzusammenhang.

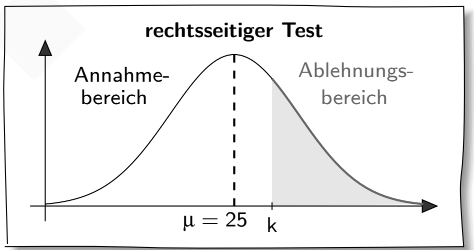
5.1 Nullhypothese und Testgröße

Testgröße T: Anzahl der Schiedsrichterfehler bei 200 Entscheidungen.
Der Erwartungswert ($\mu = n \cdot p$) liegt bei $\mu = 200 \cdot 0{,}125 = 25$ Fehlentscheidungen.

Größtmöglicher Ablehnungsbereich

Es gilt:

Nullhypothese	Gegenhypothese
$H_0 : p \leq 0{,}125$	$H_1 : p > 0{,}125$
Annahmebereich von H_0:	Ablehnungsbereich von H_0:
$A = \{0; \ldots; k-1\}$	$\overline{A} = \{k; k+1; \ldots; 200\}$



Anmerkung: k liegt immer im Ablehnungsbereich. Es handelt sich um einen rechtsseitigen Hypothesentest, da der Anteil der Fehlentscheidungen größer ist und k somit rechts vom Erwartungswert liegt (siehe Skizze).

Mit dem gegebenen Signifikanzniveau von 5 % gilt dann:

$$\begin{aligned} & P(T \geq k) \leq 0{,}05 & \\ \Longleftrightarrow\quad & 1 - P(T \leq k-1) \leq 0{,}05 & \quad |-1 \\ \Longleftrightarrow\quad & -P(T \leq k-1) \leq -0{,}95 & \quad |\cdot(-1) \\ \Longleftrightarrow\quad & P(T \leq k-1) \geq 0{,}95 & \\ \Longleftrightarrow\quad & F_{0,10}^{200}(k-1) \geq 0{,}95 & \end{aligned}$$

Der gesuchte Wert $k-1$ kann dabei einem Tafelwerk in der rechten Spalte entnommen werden. Somit ist $k-1 = 33$, da hier der Prozentwert der Summe das erste Mal **größer** als 0,95 ist. Den größtmöglichen Ablehnungsbereich erhält man somit für $k = 34$. Er lautet $\underline{\underline{\overline{A} = \{34; \ldots; 200\}}}$.

5.2 **Erklären, worin bei diesem Test der Fehler 2. Art besteht**

Es wird angenommen, dass die Fehlerquote bei jüngeren Schiedsrichtern höchstens 12,5 % beträgt, obwohl diese höher ist.

Aufgabe 3 - Original-Prüfung FOS12 MNT 2019 Stochastik-Teil SI mHm

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein großer Bergbauernhof bietet seinen Gästen während ihres Urlaubsaufenthalts verschiedene Möglichkeiten an, das Leben auf dem Land zu genießen. Erfahrungsgemäß entscheiden sich die Hälfte aller Gäste auf einer der einsamen Hütten (H) zur Ruhe zu kommen, 30 % verbringen ihren Aufenthalt im gemütlichen Stadl (S) und die übrigen Besucher übernachten im Bauernhaus (B). Bei der Anreise hat jeder Gast die Wahl, den steilen Weg bis zum Feriendomizil zu Fuß zurückzulegen ($\overline{T}$) oder sich von einem Traktorshuttle (T) nach oben befördern zu lassen. Von den Hüttenbewohnern nutzen nur ein Viertel diesen Service, bei den Stadlgästen sind es die Hälfte, und von den Gästen im Bauernhaus erklimmt keiner zu Fuß den Berg. Für Stadlgäste und Gäste des Bauernhauses besteht zusätzlich die Möglichkeit ein Frühstück (F) dazu zu buchen. Jeweils ein Fünftel dieser Gäste nutzen dieses Angebot nicht, unabhängig davon, ob der Shuttleservice in Anspruch genommen wird oder nicht. Hüttenbewohner können kein Frühstück buchen. Die Befragung eines zufällig ausgewählten Gastes nach seinen getätigten Buchungen wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments. **4 BE**

1.2 Gegeben sind folgende Ereignisse:

E_1: „Ein Gast entscheidet sich gegen den Aufstieg zum Bergbauernhof.“
$E_2 = \left\{STF; S\overline{T}F; BTF\right\}$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie $P(E_1)$. Fassen Sie E_2 möglichst einfach in Worte und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf Unvereinbarkeit. **4 BE**

2.0 Für Kinder gibt es auf dem Bauernhof spezielle Angebote, die stetig der Nachfrage angepasst werden sollen.

Derzeit stehen Ponys (P) zur Pferdepflege und für kleine Ausritte zur Verfügung. Ebenso besteht die Möglichkeit zur Mithilfe im Kuh- und Kälberstall (S). Aus dem Vorjahr ist bekannt, dass sich von 400 Kindern 108 für die Arbeit im Stall und 250 für die Ponys begeisterten, wobei 20 % dieser Ponyinteressierten auch von der Mithilfe im Stall nicht genug bekommen konnten.

2.1 Berechnen Sie, für wie viel Prozent der Kinder ein Alternativangebot ohne Tierkontakt wünschenswert wäre. **3 BE**

2.2 Ermitteln Sie, ob die Mithilfe im Stall bei den Ponyinteressierten beliebter ist als bei denen, die sich nicht für Ponys begeistern. **2 BE**

3.0 Nachdem beim Besitzer des Bergbauernhofs im vorletzten Jahr immer wieder Anfragen nach Freizeitaktivitäten für Erwachsene eingingen, bietet er seit letztem Jahr auch die in folgender Preisliste aufgeführten Erlebnisse an:

Preisliste für Erlebnisse

Melkkurs	*12 €*
Geführte Wanderung	*8 €*
Bayerischer Kochkurs	*22 €*

☺ 10 % Rabatt auf den Gesamtpreis bei Buchung der geführten Wanderung in Kombination mit dem Kochkurs! ☺

Die Gäste zeigen erfahrungsgemäß folgendes Wahlverhalten:

nur Melkkurs	nur Kochkurs	nur geführte Wanderung	Kochkurs und geführte Wanderung	kein Erlebnis
15 %	22 %	18 %	10 %	35 %

Andere Kombinationen von Erlebnissen wurden nicht gewählt.

3.1 Ermitteln Sie die zu erwartenden Einnahmen des Bergbauernhofs durch das Erlebnisangebot für das aktuelle Jahr, wenn mit 900 erwachsenen Gästen für dieses Jahr gerechnet wird. **2 BE**

3.2 Da es für einzelne Erlebnisse für die zeitgleich anwesenden Urlaubsgäste Teilnehmerbegrenzungen gibt, interessiert sich der Landwirt für die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse. Bestimmen Sie diese.

E_3: „Von 25 Gästen wählen genau acht nur die geführte Wanderung.“
E_4: „Von 25 Gästen wählen mindestens vier und weniger als neun den Melkkurs.“ **3 BE**

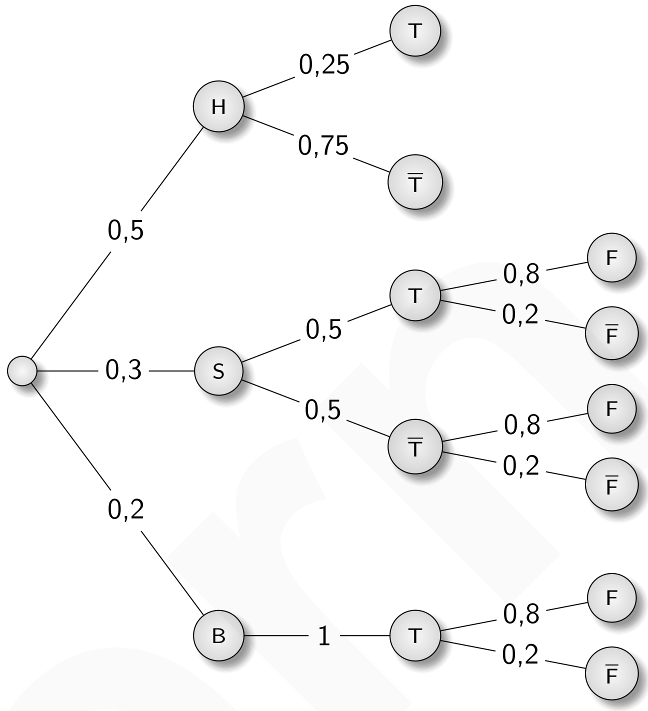
4 Aufgrund der steigenden Nachfrage nach „Urlaub auf dem Bauernhof“ überlegt der Besitzer des Bergbauernhofs zusätzlich ein besonderes Erlebnis, Übernachtungen im Freien auf einem gemütlichen Heuwagen, anzubieten. Ein befreundeter Bauernhofbesitzer behauptet basierend auf seinen Erfahrungen, dass höchstens 30 % der Gäste dieses Angebot in Anspruch nehmen. Dennoch ist der Besitzer des Bergbauernhofs der festen Überzeugung, dass Übernachtungen im Freien ein neuer Trend sind und schätzt die Nachfrage deutlich höher ein (Gegenhypothese). Um dies zu überprüfen befragt er 200 seiner Gäste.

Entwickeln Sie für den Bauern einen geeigneten Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von 5 % und geben Sie an, ob der Behauptung des befreundeten Bauern auf Basis des Tests zugestimmt werden kann, wenn sich 131 Befragte gegen eine Übernachtung im Freien aussprechen. **5 BE**

Lösungsvorschlag A3: Original-Prüfung FOS12 MNT 2019 Stochastik-Teil SI

1.1 **Wahrscheinlichkeit aller Elementarereignisse**

Aus den Angaben sind folgende Informationen zusammengefasst dargestellt.
Es gibt die Unterkünfte (H), (S) und (B). Dabei entscheidet sich die Hälfte der Gäste für (H) $\hat{=}$ 0,5, von diesen nutzt ein Viertel den Shuttleservice (T) $\hat{=}$ 0,25, der Rest dieser Gäste nutzt ihn nicht ($\overline{\text{T}}$) $\hat{=}$ 0,75.
Von allen Gästen verbringen 30 % ihren Aufenthalt im Stadl (S) $\hat{=}$ 0,3, wobei wiederum die Hälfte dieser Gäste den Shuttleservice nutzt (T) $\hat{=}$ 0,5 und ($\overline{\text{T}}$) $\hat{=}$ 0,5.
Alle verbleibenden Gäste verbringen ihren Aufenthalt im Bauernhaus (B) $\hat{=}$ 0,2, alle dieser Gäste nutzen den Shuttleservice (T) $\hat{=}$ 1.
Unabhängig von der Wahl des Shuttles nimmt jeweils ein Fünftel der Stadl- und Bauernhausbesucher die Möglichkeit des Frühstücks nicht wahr, ($\overline{\text{F}}$) $\hat{=}$ 0,2 und (F) $\hat{=}$ 0,2. Diese Frühstücksoption besteht für die Hüttenbewohner nicht.



$P(\{HT\}) = 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}125$

$P(\{H\overline{T}\}) = 0{,}5 \cdot 0{,}75 = 0{,}375$

$P(\{STF\}) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}12$

$P(\{ST\overline{F}\}) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}03$

$P(\{S\overline{T}F\}) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}12$

$P(\{S\overline{T}\overline{F}\}) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}03$

$P(\{BTF\}) = 0{,}2 \cdot 1 \cdot 0{,}8 = 0{,}16$

$P(\{BT\overline{F}\}) = 0{,}2 \cdot 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}04$

1.2 **E_1 in aufzählender Mengenschreibweise und Wahrscheinlichkeit**

Die Entscheidung gegen den Aufstieg zum Bergbauernhof entspricht der Entscheidung für das Shuttle. Es werden also alle Ereignisse aufgezählt, die T enthalten.

$$\underline{\underline{E_1 = \left\{HT; STF; ST\overline{F}; BTF; BT\overline{F}\right\}}}$$

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses werden alle Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse gemäß des Baumdiagramms addiert.

$$P(E_1) = 0{,}125 + 0{,}12 + 0{,}03 + 0{,}16 + 0{,}04 = \underline{\underline{0{,}475}}$$

E_2 in Worten
Enthalten sind alle Elementarereignisse, die F beinhalten. Somit gilt:
E_2: „Ein Gast bucht ein Frühstück dazu."
Vereinbarkeit der Ereignisse
Es wird geprüft ob Elementarereignisse Teil von beiden Ereignissen sind:

$$E_1 \cap E_2 = \{STF; BTF\} \neq \{\}$$

Demnach sind die Ereignisse vereinbar.

2.1 **Mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit bestimmen**
Von 400 Kindern begeistern sich 108 für die Arbeit im Stall (S), somit $400 - 108 = 292$ Kinder nicht ($\overline{S}$). Insgesamt begeistern sich 250 Kinder für die Ponys (P), somit $400 - 250 = 150$ Kinder nicht ($\overline{P}$). 20 % der 250 Ponyinteressierten sind zudem am Stall interessiert, dies entspricht $0{,}2 \cdot 250 = 50$ Kindern. Somit sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P(S) = \frac{108}{400} = 0{,}27, \quad P(\overline{S}) = 0{,}73,$$
$$P(P) = \frac{250}{400} = 0{,}625, \quad P(\overline{P}) = 0{,}375, \quad P(S \cap P) = \frac{50}{400} = 0{,}125$$

Damit ergibt sich die Vierfeldertafel wie folgt (gegebene Wahrscheinlichkeiten sind grau hinterlegt):

VFT mit rel. Häufigkeiten

	P	$\overline{P}$	$\sum$
S	0,125	0,145	0,27
$\overline{S}$	0,5	0,23	0,73
$\sum$	0,625	0,375	1

VFT mit abs. Häufigkeiten

	P	$\overline{P}$	$\sum$
S	50	58	108
$\overline{S}$	200	92	292
$\sum$	250	150	400

Alle Werte durch 400 teilen um auf die rel. Häufigkeiten zu kommen.

Demnach gilt für die Option ohne Tierkontakt:

$$P(\overline{S} \cap \overline{P}) = 0{,}23 = \underline{\underline{23\,\%}}$$

2.2 Laut Angaben sind 20 % der Ponyinteressierten auch an Mithilfe im Stall interessiert, es gilt:

$$P_P(S) = 20\,\%$$

Mithilfe der Häufigkeiten der Vierfeldertafel gilt:

$$P_{\overline{P}}(S) = \frac{P(S \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{0{,}145}{0{,}375} \approx 0{,}3867 \approx 38{,}67\,\%$$

Demnach ist die Mithilfe im Stall bei den Kindern beliebter, die sich nicht für Ponys begeistern.

3.1 Zu erwartenden Einnahmen für das aktuelle Jahr

Die Zufallsgröße X beschreibt die Einnahmen in Euro pro Person entsprechend der Auswahl der Erlebnisse.

Jedem Feld der gegebenen Tabelle kann anhand der Ereignisse und dem jeweiligen Preis nach Preistafel ein Preis zugeordnet werden. Für die Preise gilt dabei (dabei ist der Rabatt auf die Kombination zu beachten):

nur Melkkurs $\hat{=}$ 12 €   nur Kochkurs $\hat{=}$ 22 €   nur geführte Wanderung $\hat{=}$ 8 €

Kochkurs und geführte Wanderung $\hat{=} 0{,}9 \cdot (22\,€ + 8\,€) = 27\,€$ kein Erlebnis $\hat{=}$ 0 €

Entsprechend der Tabelle gilt dann für den Erwartungswert der Größe X:

$$E(X) = 0{,}15 \cdot 12 + 0{,}22 \cdot 22 + 0{,}18 \cdot 8 + 0{,}1 \cdot 27 + 0{,}35 \cdot 0 = 10{,}78$$

Pro Person sind also 10,78 € zu erwarten. Die zu erwartenden Einnahmen für 900 Personen belaufen sich damit auf $10{,}78\,€ \cdot 900 = \underline{\underline{9702\,€}}$.

3.2 Berechnung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten

Für E_3 beschreibt X die Anzahl der Gäste unter 25, die sich nur für die geführte Wanderung interessieren. Laut Tabelle ist die Wahrscheinlichkeit für nur die geführte Wanderung $p = 0{,}18$. Dann gilt:

$$P(E_3) = P(X = 8) = B(25; 0{,}18; 8) \approx \underline{\underline{0{,}04084}} \text{ [Tafelwerk] oder als Alternative rechnerisch}$$

$$= B(25; 0{,}18; 8) = \binom{25}{8} \cdot 0{,}18^8 \cdot 0{,}82^{17} \approx \underline{\underline{0{,}04084}}$$

Nun beschreibt Y die Anzahl der Gäste unter 25, die den Melkkurs wählen. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $p = 0{,}15$. Dann gilt:

$$P(E_4) = P(4 \leq Y < 9) = P(Y \leq 8) - P(Y \leq 3) = \sum_{i=0}^{8} B(25; 0{,}15; i) - \sum_{i=0}^{3} B(25; 0{,}15; i)$$

$$= F_{0{,}15}^{25}(8) - F_{0{,}15}^{25}(3) \approx 0{,}99203 - 0{,}47112 = \underline{\underline{0{,}52091}}$$

4 Nullhypothese und Testgröße

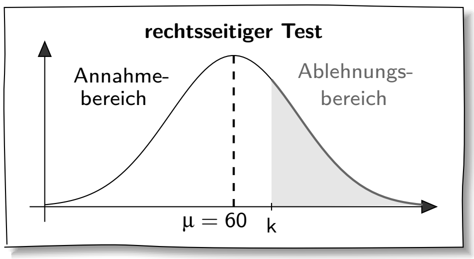
Testgröße T: Anzahl der Befragten von insgesamt 200, die sich für eine Übernachtung im Freien aussprechen.

Der Erwartungswert ($\mu = n \cdot p$) liegt bei $\mu = 200 \cdot 0{,}3 = 60$ Personen.

Größtmöglicher Ablehnungsbereich

Es gilt:

Nullhypothese	Gegenhypothese
$H_0 : p \leq 0{,}3$	$H_1 : p > 0{,}3$
Annahmebereich von H_0:	Ablehnungsbereich von H_0:
$A = \{0; ...; k-1\}$	$\overline{A} = \{k; k+1; ...; 200\}$



Anmerkung: k liegt immer im Ablehnungsbereich. Es handelt sich um einen rechtseitigen Hypothesentest, da der Anteil derjenigen, die sich für eine Übernachtung im Freien aussprechen, größer ist und k somit rechts vom Erwartungswert liegt (siehe Skizze).

Mit dem gegebenen Signifikanzniveau von 5 % gilt dann:

$$
\begin{aligned}
& & P(T \geq k) &\leq 0{,}05 & \\
&\iff & 1 - P(T \leq k-1) &\leq 0{,}05 & \quad |-1 \\
&\iff & -P(T \leq k-1) &\leq -0{,}95 & \quad |\cdot(-1) \\
&\iff & P(T \leq k-1) &\geq 0{,}95 & \\
&\iff & F_{0,30}^{200}(k-1) &\geq 0{,}95 &
\end{aligned}
$$

Der gesuchte Wert $k-1$ kann dabei einem Tafelwerk in der rechten Spalte entnommen werden. Somit ist $k-1=71$, da hier der Prozentwert der Summe das erste Mal **größer** als 0,95 ist. Den größtmöglichen Ablehnungsbereich erhält man somit für $k=72$. Er lautet $\overline{A}=\{72; 73; ...; 200\}$ und der zugehörige Annahmebereich also $A=\{0; 1; ...; 71\}$.

Entscheidung auf Basis des Tests

Wenn sich 131 Befragte gegen eine Übernachtung im Freien aussprechen, so sprechen sich $200-131=69$ Befragte dafür aus. Es ist $69 \in A$, die Nullhypothese wird also beibehalten. Auf Basis des Tests sollte der Behauptung des befreundeten Bauern also zugestimmt werden.

Aufgabe 4 - Original-Prüfung FOS12 MNT 2019 Stochastik-Teil SII

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Nachfolgend finden Sie einen Auszug aus der Preisliste eines Friseursalons:

DAMEN		***5 % Rabatt auf Komplettpaket:***
■ Schnitt	EUR 16,00	***Waschen, Schneiden, Färben, Föhnen!***
■ Waschen, Schneiden	EUR 23,00	
■ Waschen, Schneiden, Föhnen	EUR 34,50	
■ Waschen, Föhnen	EUR 18,50	
HERREN		
■ Schnitt	EUR 12,00	
■ Waschen, Schneiden	EUR 18,50	
KOLORATION		
■ Farbe	EUR 26,50	

In einer groß angelegten Umfrage unter den weiblichen Kunden des Salons wurde festgestellt, wie häufig zum Haareschneiden (S) die Zusatzleistungen Waschen (W), Föhnen (F) und Kolorieren (K) gewünscht werden.

Folgende Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeiten für die Wahl von Dienstleistungen an. In dieser ist berücksichtigt, dass zum Kolorieren die Zusatzleistung Waschen gewählt werden muss und Föhnen nur in Kombination mit Waschen gewählt werden kann.

ω	S	WS	WSF	WSK	WSKF
$P(\{\omega\})$	0,15	0,2	0,35	0,06	0,24

1.1 Zur Planung der Terminvergabe und des Einkaufs von Haarfärbemitteln und Pflegeprodukten sind die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse von Interesse. Berechnen Sie diese.

E_1 : „Von 15 zufällig ausgewählten Kundinnen wählen genau fünf nur höchstens eine Zusatzleistung.“

E_2 : „Von 15 zufällig ausgewählten Kundinnen entscheiden sich mehr als 40 % für eine Koloration.“

5 BE

1.2.0 Die Zufallsgröße X gibt den Betrag in Euro an, den eine Kundin für die gewählten Dienstleistungen bei einem Besuch im Friseursalon bezahlt.

1.2.1 Erstellen Sie mithilfe der Preisliste eine vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und interpretieren Sie ihn im Sachzusammenhang. Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf ganze Cent. **5 BE**

1.2.2 Der Friseursalon hat pro Monat (u.a. für Wasser, Strom, Gehaltszahlungen und Miete) Ausgaben in Höhe von 7500 €. Pro Tag ist durchschnittlich mit 15 Kundinnen und 8 Kunden zu rechnen. Letztere bezahlen im Durchschnitt 14,50 € beim Verlassen des Friseursalons.

Entscheiden Sie durch Rechnung unter Berücksichtigung der Ergebnisse von Aufgabe 1.2.1, ob die Inhaberin die Preise erhöhen sollte, wenn ein monatlicher Gewinn von 6500 € erzielt werden soll. Ein Monat hat durchschnittlich 21 Arbeitstage. **2 BE**

2 Das Haarefärben ist sowohl beim Erwachsenen als auch bei Jugendlichen sehr beliebt. Um ihre Zeitplanung zu optimieren, führt die Salonbesitzerin eine Strichliste, in der sie das Alter aller Kunden sowie deren Wunsch nach Farbe vermerkt.
Unter 200 Kunden waren 140 Erwachsene (E). Insgesamt ließen sich 55 Kunden die Haare färben (F). 40 Kunden waren Jugendliche, die sich gegen eine Koloration entschieden.
Untersuchen Sie, bei welcher Altersgruppe das Haarefärben beliebter ist. **4 BE**

3.0 Seit mehreren Jahren bezieht die Salonbetreiberin ihre Pflegeprodukte von einem Hersteller, der bekannt ist für die gute Qualität seiner Produkte und damit wirbt, dass höchsten 5 % der Kunden und Kundinnen diese „nicht vertragen“. Aufgrund zahlreicher Kundenbeschwerden vermutet die Inhaberin, dass dieser Anteil gestiegen ist (Gegenhypothese). Um dies zu überprüfen, soll ein Signifikanztest auf einem Signifikanzniveau von 2 % durchgeführt werden. Dazu werden insgesamt 100 Kunden und Kundinnen, bei denen die Pflegeprodukte bereits verwendet wurden, befragt.

3.1 Geben Sie für diesen Test die Testgröße sowie die Nullhypothese an. Berechnen Sie ferner den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese. Welche Entscheidung legt der Test nahe, wenn sich insgesamt 9 Kunden und Kundinnen beschweren? **5 BE**

3.2 Berechnen Sie für diesen Test die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn tatsächlich 10 % der Kunden und Kundinnen die Pflegeprodukte des Herstellers „nicht vertragen“.

Deuten Sie die Wahrscheinlichkeiten des Fehlers 2. Art im Sachzusammenhang. **2 BE**

Lösungsvorschlag A4: Original-Prüfung FOS12 MNT 2019 Stochastik-Teil SII

1.1 **Berechnung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten**

Die Zufallsgröße Z beschreibt die Anzahl von Kundinnen unter 15 ausgewählten, die nur höchstens eine Zusatzleistung wählen. Dies entspricht den Elementarereignissen „nur Schneiden“ (S; keine Zusatzleistung) und „Schneiden mit Waschen“ (WS; nur Zusatzleistung Waschen) und damit eine Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}15 + 0{,}2 = 0{,}35$. Dann gilt:

E_1: „genau fünf nur höchstens eine Zusatzleistung.“

$$P(E_1) = P(Z = 5) = B(15; 0{,}35; 5) \approx \underline{\underline{0{,}21234}} \text{ [Tafelwerk] oder als Alternative rechnerisch}$$

$$= B(15; 0{,}35; 5) = \binom{15}{5} \cdot 0{,}35^5 \cdot 0{,}65^{10} \approx \underline{\underline{0{,}21234}}$$

Nun beschreibt die Zufallsgröße Z die Anzahl von Kundinnen unter 15 ausgewählten, die sich für eine Koloration entscheiden. Dies umfasst die Elementarereignisse „Waschen, Schneiden, Koloration“ (WSK) und „Waschen, Schneiden, Koloration, Föhnen“ (WSKF). Die Wahrscheinlichkeit beträgt also $p = 0{,}06 + 0{,}24 = 0{,}3$.

E_2: „entscheiden sich mehr als 40 % für eine Koloration.“ (entspricht mehr als 6 Kundinnen)

$$P(Z > 6) = P(Z \geq 7) = 1 - P(Z \leq 6) = 1 - \sum_{i=0}^{6} B(15; 0{,}3; i) = 1 - F_{0,3}^{15}(6)$$

$$\approx 1 - 0{,}86886 \approx \underline{\underline{0{,}13114}}$$

1.2.0 Die Zufallsgröße X gibt den Betrag in Euro an, den eine Kundin für die gewählten Dienstleistungen bei einem Besuch im Friseursalon bezahlt.

1.2.1 **Wahrscheinlichkeitsverteilung**

Für die einzelnen Einträge der Tabelle wird der jeweilige Preis berechnet:

Elementarereignis S: 16 € $\Rightarrow$ $P(X = 16) = 0{,}15$

Elementarereignis WS: 23 € $\Rightarrow$ $P(X = 23) = 0{,}2$

Elementarereignis WSF: 34,50 € $\Rightarrow$ $P(X = 34{,}50) = 0{,}35$

Elementarereignis WSK: 23 € + 26,50 € = 49,50 € $\Rightarrow$ $P(X = 49{,}50) = 0{,}06$

Elementarereignis WSKF: (34,50 € + 26,50 €) · 0,95 = 57,95 € $\Rightarrow$ $P(X = 57{,}95) = 0{,}24$

Somit gilt zusammenfassend:

x	16	23	34,50	49,50	57,95
$P(X = x)$	0,15	0,2	0,35	0,06	0,24

Erwartungswert

$$E(X) = 16 \cdot 0{,}15 + 23 \cdot 0{,}2 + 34{,}50 \cdot 0{,}35 + 49{,}50 \cdot 0{,}06 + 57{,}95 \cdot 0{,}24 \approx 35{,}95$$

Interpretation im Sachzusammenhang

Der Erwartungswert gibt hier den durchschnittlichen Preis an, den eine Kundin pro Besuch im Friseursalon bezahlt, nämlich $\underline{\underline{35{,}95\,€}}$.

1.2.2 **Entscheidung, ob die Preise erhöht werden sollten**

Die durchschnittlichen Einnahmen pro Kundin liegen bei 35,95 €, die bei einem Kunden bei 14,50 €. Bei 21 Arbeitstagen mit jeweils durchschnittlich 15 Kundinnen und 8 Kunden gilt für die durchschnittlichen Gesamteinnahmen pro Monat:

$$21 \cdot (15 \cdot 35{,}95\,€ + 8 \cdot 14{,}50\,€) = 13760{,}25\,€$$

Bei monatlichen Ausgaben von 7500 € beläuft sich der monatliche Gewinn also auf $13760{,}25\,€ - 7500\,€ = 6260{,}25\,€$.

Wenn der gewünschte Gewinn bei 6500 € liegt, müssten die Preise also erhöht werden.

2 **Mithilfe einer vollständigen Vierfeldertafel die Wahrscheinlichkeit bestimmen**

Unter 200 Kunden waren 140 Erwachsene (E), der Rest, also $200 - 140 = 60$ waren also Jugendliche ($\overline{E}$). Von allen Kunden ließen sich 55 die Haare färben (F), $200 - 55 = 145$ Kunden ließen sich also nicht die Haare färben ($\overline{F}$). Insgesamt 40 Kunden waren Jugendliche, die sich gegen eine Koloration entschieden ($\overline{E} \cap \overline{F}$).

Somit sind folgende Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P(E) = \frac{140}{200} = 0{,}7; \quad P(\overline{E}) = 0{,}3; \quad P(K) = \frac{55}{200} = 0{,}275$$
$$P(\overline{F}) = 0{,}725 \quad P(\overline{E} \cap \overline{F}) = \frac{40}{200} = 0{,}2$$

Damit ergibt sich die Vierfeldertafel wie folgt (gegebene Wahrscheinlichkeiten sind grau hinterlegt):

VFT mit rel. Häufigkeiten

	E	$\overline{E}$	$\sum$
F	0,175	0,1	0,275
$\overline{F}$	0,525	0,2	0,725
$\sum$	0,7	0,3	1

VFT mit abs. Häufigkeiten

	E	$\overline{E}$	$\sum$
F	35	20	55
$\overline{F}$	105	40	145
$\sum$	140	60	200

Alle Werte durch 200 teilen um auf die rel. Häufigkeiten zu kommen.

Mithilfe der Werte aus der Vierfeldertafel können nun die bedingten Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden:

$$P_E(F) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{0{,}175}{0{,}7} = \frac{1}{4} \qquad P_{\overline{E}}(F) = \frac{P(\overline{E} \cap F)}{P(\overline{E})} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = \frac{1}{3}$$

Somit ist das Haarefärben bei Jugendlichen beliebter als bei Erwachsenen.

3.1 Nullhypothese und Testgröße

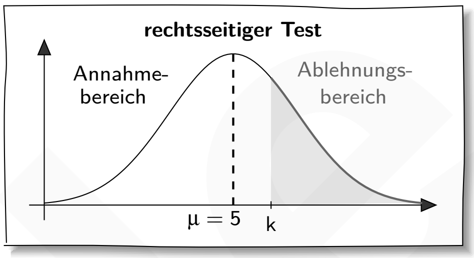
Testgröße T: Anzahl der Kunden und Kundinnen von insgesamt 100, die die Pflegeprodukte „nicht vertragen".

Der Erwartungswert ($\mu = n \cdot p$) liegt bei $\mu = 100 \cdot 0{,}05 = 5$ Kunden und Kundinnen.

Größtmöglicher Ablehnungsbereich

Es gilt:

Nullhypothese	Gegenhypothese
$H_0 : p \leq 0{,}05$	$H_1 : p > 0{,}05$
Annahmebereich von H_0:	Ablehnungsbereich von H_0:
$A = \{0; \ldots; k-1\}$	$\overline{A} = \{k; k+1; \ldots; 100\}$



Anmerkung: k liegt immer im Ablehnungsbereich. Es handelt sich um einen rechtsseitigen Hypothesentest, da der Anteil derjenigen, die das Produkt „nicht vertragen", größer ist und k somit rechts vom Erwartungswert liegt (siehe Skizze).

Mit dem gegebenen Signifikanzniveau von 2 % gilt dann:

$$
\begin{aligned}
& & P(T \geq k) &\leq 0{,}02 & & \\
&\Longleftrightarrow & 1 - P(T \leq k-1) &\leq 0{,}02 & &| -1 \\
&\Longleftrightarrow & -P(T \leq k-1) &\leq -0{,}98 & &| \cdot (-1) \\
&\Longleftrightarrow & P(T \leq k-1) &\geq 0{,}98 & & \\
&\Longleftrightarrow & F_{0{,}05}^{100}(k-1) &\geq 0{,}98 & &
\end{aligned}
$$

Der gesuchte Wert $k-1$ kann dabei einem Tafelwerk in der rechten Spalte entnommen werden. Somit ist $k-1 = 10$, da hier der Prozentwert der Summe das erste Mal **größer** als 0,98 ist. Den größtmöglichen Ablehnungsbereich erhält man somit für $k = 11$. Er lautet $\underline{\underline{\overline{A} = \{11; 12; \ldots; 100\}}}$ und der zugehörige Annahmebereich also $A = \{0; 1; \ldots; 10\}$.

Entscheidung auf Basis des Tests

Es beschweren sich neun Kunden und Kundinnen. Da $9 \in A$ ist, wird die Nullhypothese also beibehalten.

3.2 Wahrscheinlichkeit der Fehlers 2. Art

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(\text{„Fehler 2. Art"}) = \sum_{i=0}^{10} B(100; 0{,}1; i) = F_{0{,}1}^{100}(10) \approx \underline{\underline{0{,}58316}}$$

Deutung im Sachzusammenhang

Der Fehler 2. Art beschreibt ganz allgemein die Annahme der Nullhypothese, obwohl diese falsch ist. Konkret ist der berechnete Wert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Besitzerin des Friseurstudios dem Hersteller glaubt (also der Anteil der Kunden und Kundinnen, die das Produkt „nicht vertragen") nicht erhöht ist), obwohl sich dieser Anteil tatsächlich auf 10 % erhöht hat.

Aufgabe 5 - Bedingte Wahrscheinlichkeit: FOS13 MT 2017, BI 3 - adaptiert

4.0 Für eine Segelregatta benötigt der Veranstalter 250 langfristig intakte Bojen. Bei den Bojen treten jedoch im Laufe der Zeit durch Materialfehler Schäden auf, verursacht durch hohen Wellengang bzw. durch UV-Strahlung.

4.1 Nach Angaben des Herstellers erleiden 5 % der Bojen nach einer gewissen Einsatzzeit einen Wellenschaden, 40 % von diesen Bojen sind zudem anfällig gegenüber dauerhafter UV-Strahlung. 90 % aller Bojen sind sowohl gegenüber hohen Wellen als auch dauerhafter UV-Strahlung unempfindlich, also langfristig intakt. Bestimmen Sie dan Anteil der gegenüber UV-Strahlung empfindlichen Bojen unter denen, die gegenüber großen Wellen unempfindlich sind. **6 BE**

Die weiteren Aufgaben 1.2 - 1.3 sind nicht mehr relevant.

Lösungsvorschlag A5: Bedingte Wahrscheinlichkeit: FOS13 MT 2017, BI 3 - adaptiert

1.1 Es werden folgende Ereignisse betrachtet:

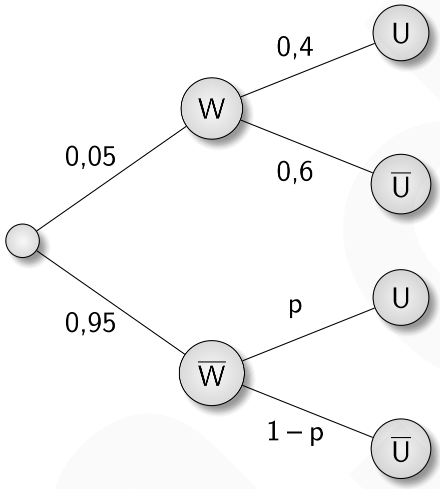
W: Eine Boje ist empfindlich gegenüber Wellenschäden

U: Eine Boje ist empfindlich gegenüber UV-Strahlung

Laut Angabe sind dann die folgenden Wahrscheinlichkeiten gegeben:

$$P(W) = 0{,}05 \qquad P_W(U) = 0{,}4 \qquad P(\overline{W} \cap \overline{U}) = 0{,}9$$

Damit kann ein Baumdiagramm wie folgt erstellt werden:



Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{W}}(U)$, die nach Deklaration im Baumdiagramm gerade p ist. Die gegebene Wahrscheinlichkeit $P(\overline{W} \cap \overline{U})$ entspricht dem untersten Zweig, sodass nach den Pfadregeln im Baumdiagramm gilt:

$$\begin{aligned}
& & P(\overline{W} \cap \overline{U}) &= 0{,}9 & \\
&\Longleftrightarrow & 0{,}95 \cdot (1 - p) &= 0{,}9 & \\
&\Longleftrightarrow & 0{,}95 - 0{,}95p &= 0{,}9 & &|-0{,}9 \\
&\Longleftrightarrow & 0{,}05 - 0{,}95p &= 0 & &|+0{,}95p \\
&\Longleftrightarrow & 0{,}05 &= 0{,}95p & &|:0{,}95 \\
&\Longleftrightarrow & p &= \frac{5}{95} & \\
&\Longleftrightarrow & p &= \frac{1}{19} &
\end{aligned}$$

Der Anteil der gegenüber UV-Strahlung empfindlichen Bojen unter denen, die gegenüber großen Wellen unempfindlich ist beträgt $\underline{\underline{\frac{1}{19}}}$.

Aufgabe 6 - Bedingte Wahrscheinlichkeit: FOS13 MT 2018, BI 2 - adaptiert

In einer Postfiliale werden die auszuliefernden Pakete nur nach Privat- oder Firmenadressen unterschieden.

1.0 Der Anteil an Privatadressen in dieser Postfiliale beträgt 70 %. Erfahrungsgemäß können 20 % aller Pakete nicht direkt zugestellt werden.

1.1 Die Hälfte dieser nichtzustellbaren Pakete trägt erfahrungsgemäß eine Privatadresse. Verwenden Sie die Bezeichnungen E: „Das Paket hat einen privaten Empfänger.“ und $\overline{Z}$: „Das Paket kann nicht direkt zugestellt werden.“, um die Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln, dass

a) ein Paket, das direkt zugestellt werden konnte, keinen privaten Empfänger hat.

b) ein an einen privaten Empfänger adressiertes Paket direkt zugestellt werden konnte.

7 BE

Die weitere Aufgabe 1.2 ist nicht mehr relevant.

Lösungsvorschlag A6: Bedingte Wahrscheinlichkeit: FOS13 MT 2018, BI 2 - adaptiert

1.1 Es werden folgende Fälle betrachtet:

E: Das Paket hat einen privaten Empfänger
$\overline{E}$: Das Paket hat keinen privaten Empfänger
Z: Das Paket kann direkt zugestellt werden
$\overline{Z}$: Das Paket kann nicht direkt zugestellt werden

Laut Angabe sind die folgenden Wahrscheinlichkeiten gegeben.

$$P(E) = 0{,}7$$
$$P(\overline{Z}) = 0{,}2$$

$$P_{\overline{Z}}(E) = \frac{P(\overline{Z} \cap E)}{P(\overline{Z})} = 0{,}5$$
$$\Rightarrow \quad P(\overline{Z} \cap E) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$$

Mithilfe dieser Ergebnisse lässt sich nun eine Vierfeldertafel entwickeln, aus der man alle gesuchten Wahrscheinlichkeiten ermitteln kann:

	E	$\overline{E}$	$\sum$
Z			
$\overline{Z}$	0,1		0,2
$\sum$	0,7		1

$\Rightarrow$

	E	$\overline{E}$	$\sum$
Z	0,6	0,2	0,8
$\overline{Z}$	0,1	0,1	0,2
$\sum$	0,7	0,3	1

Damit ergeben sich die gesuchten Wahrscheinlichkeiten der Aufgabe:

$$\text{a)} \quad P_Z(\overline{E}) = \frac{P(Z \cap \overline{E})}{P(Z)} = \frac{0{,}2}{0{,}8} = \underline{\underline{0{,}25}}$$

$$\text{b)} \quad P_E(Z) = \frac{P(E \cap Z)}{P(E)} = \frac{0{,}6}{0{,}7} \approx \underline{\underline{0{,}857}}$$

Aufgabe 7 - Bedingte Wahrscheinlichkeit: FOS13 MT 2016, BI 1 und 3

1.0 Einem Eishockey-Trainer stehen insgesamt 15 Spieler zur Verfügung, wobei es sich um zwölf Feldspieler und drei Torhüter handelt.

1.1 Vor Spielbeginn laufen alle 15 Spieler hintereinander in die Arena ein. Ermitteln Sie, wie viele verschiedene Reihenfolgen es dafür gibt, wenn der Spielführer als Letzter das Eis betritt. **2 BE**

1.2 Bestimmen Sie, wie viele Möglichkeiten der Trainer für die Anfangsaufstellung hat, wenn zu Beginn vier Feldspieler und ein Torhüter auf dem Eis stehen. **2 BE**

2 Zur neuen Saison kaufen sich alle Spieler neue Schlittschuhe, wobei 20 % der Spieler den sehr teuren Schlittschuh „Spirit“ wählen. 90 % der Spieler, die „Spirit“ tragen, bekommen keine Blasen an den Füßen. Insgesamt erhalten 28 % der Spieler Blasen an den Füßen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Spieler, der keine Blasen hat, nicht „Spirit“ trägt. **6 BE**

Lösungsvorschlag A7: Bedingte Wahrscheinlichkeit: FOS13 MT 2016, BI 1 und 3

1.1 Es sind insgesamt 15 Spieler, wovon einer Spielführer ist und 14 andere normale Spieler sind. Da der Spielführer als letztes einlaufen soll, ist dessen Einlaufposition bereits festgelegt. Betrachtet man die Positionen der anderen Spieler, so bleiben für einen Spieler noch 14 freie Positionen. Für den nächsten bleiben noch 13 freie Positionen, da eine besetzt ist. Für den nächsten bleiben entsprechend noch 12, dann 11... Schließlich ergibt sich Anzahl der Reihenfolgen wie folgt:

$$14! \cdot 1 = \underline{\underline{87\,178\,291\,200}}$$

1.2 Von 12 vorhandenen Feldspieler werden 4 Plätze besetzt, während aus den 3 verfügbaren Torhütern einer ausgewählt wird. Für die Aufstellung ergibt sich dann die folgende Anzahl an Möglichkeiten:

$$\binom{12}{4} \cdot \binom{3}{1} = 495 \cdot 3 = \underline{\underline{1\,485}}$$

2 Laut Angabe gilt:

$$P(S) = 0{,}2 \text{ (20 % wählen den Schuh „Spirit“)}$$
$$P(B) = 0{,}28 \text{ (Insgesamt 28 % der Spieler erhalten Blasen)}$$
$$P_S(\overline{B}) = 0{,}9 \text{ (90 % der Spieler die „Spirit“ tragen, haben keine Blasen)}$$

Für die Wahrscheinlichkeit $P_S(\overline{B})$ gilt außerdem:

$$\begin{aligned} P_S(\overline{B}) &= \frac{P(S \cap \overline{B})}{P(S)} \\ \Longleftrightarrow \quad 0{,}9 &= \frac{P(S \cap \overline{B})}{0{,}2} \qquad | \cdot 0{,}2 \\ \Longleftrightarrow \quad P(S \cap \overline{B}) &= 0{,}18 \end{aligned}$$

Mit diesen Werten lässt sich nun eine Vierfeldertafel erstellen und entsprechend ergänzen:

	S	$\overline{S}$	$\sum$
B			0,28
$\overline{B}$	0,18		
$\sum$	0,2		1

$\Rightarrow$

	S	$\overline{S}$	$\sum$
B	0,02	0,26	0,28
$\overline{B}$	0,18	0,54	0,72
$\sum$	0,2	0,8	1

Gesucht ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger Spieler, der keine Blasen hat, nicht „Spirit“ trägt. Mithilfe der Werte aus der Vierfeldertafel kann nun diese Wahrscheinlichkeit bestimmt werden:

$$P_{\overline{B}}(\overline{S}) = \frac{P(\overline{S} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0{,}54}{0{,}72} = \underline{\underline{0{,}75}}$$

Aufgabe 8 - Bedingte Wahrscheinlichkeit: FOS13 MT 2016, BII 3 - adaptiert

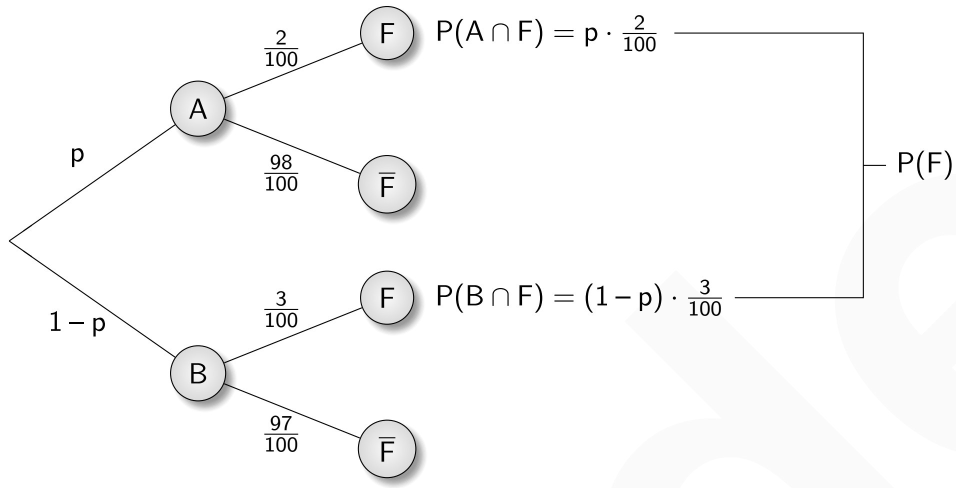
1.0 Zwei Firmen A und B liefern Objektträger an das Labor des pathologischen Instituts. Von den Objektträgern der Firma A sind 2 % fehlerhaft, von jenen der Firma B sind es 3 %.

1.1 Von allen gelieferten fehlerhaften Objektträgern stammen $\frac{2}{3}$ von der Firma A. Berechnen Sie, welchen Anteil die Objektträger der Firma A in der Gesamtlieferung ausmachen. **7 BE**

Die weiteren Aufgaben 1.2 - 1.2.2 sind nicht mehr relevant.

Lösungsvorschlag A8: Bedingte Wahrscheinlichkeit: FOS13 MT 2016, BII 3 - adaptiert

1.1 Aus den gegebenen Werten lässt sich folgendes Baumdiagramm erstellen:



Dabei steht F für einen fehlerhaften Objektträger und $\overline{F}$ für einen nicht fehlerhaften Objektträger. Gesucht ist p, was letztlich dem Anteil der Firma A in der Gesamtlieferung entspricht. Laut Angabe gilt $P_F(A) = \frac{2}{3}$. Aus der Berechnungsvorschrift von $P_F(A)$ kann p ermittelt werden. Die Werte werden dabei dem Baumdiagramm entsprechend der Pfadregeln entnommen:

$$
\begin{aligned}
& & \frac{2}{3} &= P_F(A) \\
&\iff & \frac{2}{3} &= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} \\
&\iff & \frac{2}{3} &= \frac{\frac{2}{100} \cdot p}{\frac{3}{100} \cdot (1-p) + \frac{2}{100} \cdot p} \\
&\iff & \frac{2}{3} &= \frac{2p}{3(1-p) + 2p} \\
&\iff & \frac{2}{3} &= \frac{2p}{3-p} & & | \cdot (3-p) \\
&\iff & \frac{2}{3}(3-p) &= 2p \\
&\iff & 2 - \frac{2}{3}p &= 2p & & | + \frac{2}{3}p \\
&\iff & 2 &= \frac{8}{3}p & & | \cdot \frac{3}{8} \\
&\iff & p &= \frac{6}{8} \\
&\iff & p &= 0{,}75
\end{aligned}
$$

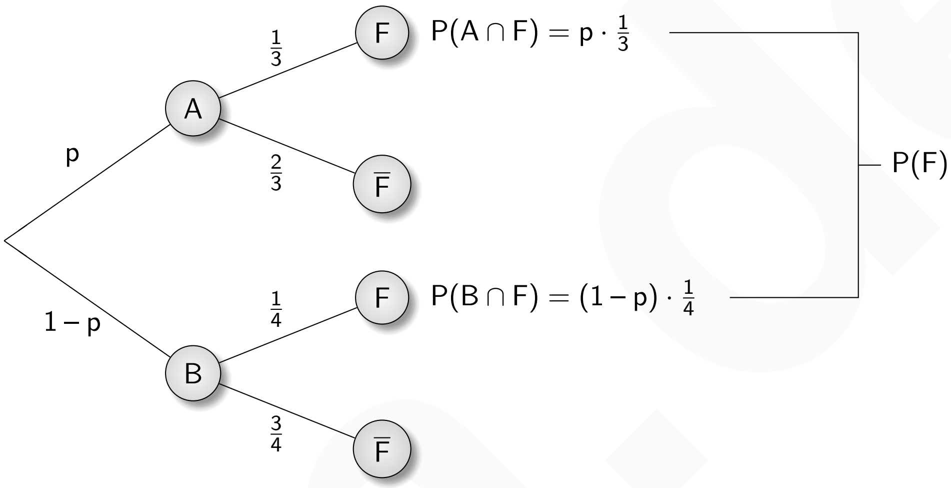
Somit haben die Objektträger der Firma A also einen Anteil von <u>75 %</u> an der Gesamtlieferung.

Aufgabe 9 - Bedingte Wahrscheinlichkeit: FOS13 MT 2015, BII 2

1 In einer Jahrgangsstufe sind 51 Schüler und diese werden in den Klassen A und B unterrichtet. Die Schüler der beiden Klassen haben die Möglichkeit an einem gemeinsamen Fremdsprachenkurs teilzunehmen. $\frac{1}{3}$ der Schüler in Klasse A und $\frac{1}{4}$ der Schüler in Klasse B belegen den Fremdsprachenkurs. 60 % der Schüler des Fremdsprachenkurses kommen aus Klasse A. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebig ausgewählter Schüler in der Klasse B ist und keinen Fremdsprachenkurs besucht. **8 BE**

Lösungsvorschlag A9: Bedingte Wahrscheinlichkeit: FOS13 MT 2015, BII 2

1 Aus den gegebenen Werten lässt sich folgendes Baumdiagramm erstellen:



Weiterhin gilt laut Angabe $P_F(A) = 0{,}60$. Aus der Berechnungsvorschrift von $P_F(A)$ kann p ermittelt werden. Die Werte werden dabei dem Baumdiagramm entnommen.

$$\begin{aligned}
&& 0{,}6 &= P_F(A) \\
\iff && 0{,}6 &= \frac{P(A\cap F)}{P(F)} \\
\iff && 0{,}6 &= \frac{p\cdot\frac{1}{3}}{p\cdot\frac{1}{3}+(1-p)\cdot\frac{1}{4}} \\
\iff && 0{,}6 &= \frac{4p}{3+p} && |\cdot(3+p) \\
\iff && 0{,}6(3+p) &= 4p \\
\iff && 1{,}8+0{,}6p &= 4p && |-0{,}6p \\
\iff && 1{,}8 &= 3{,}4p && |:3{,}4 \\
\iff && p &= \frac{9}{17}
\end{aligned}$$

Damit kann schließlich gemäß der Pfadregeln die gesuchte Wahrscheinlichkeit bestimmt werden:

$$P(B\cap\overline{F}) = \left(1-\frac{9}{17}\right)\cdot\frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{6}{17}}}$$

Musterprüfung nach LehrplanPLUS

1.0 Gegeben ist die Funktion $F(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x}$ mit $D_{F;max} =]0; \infty[$.

1.1 Zeigen Sie, dass $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right) \cdot e^{-x}$ ist. **2 BE**

1.2 Berechnen Sie die exakte Maßzahl des Volumens der Körpers der entsteht, wenn der Graph von $F(x)$ im Intervall $[1; 2]$ um die x-Achse rotiert. **5 BE**

2 Betrachtet wird nun die gebrochenrationale Funktion $g(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x + 2}{x^2 + 8x + 16}$ mit $D_g = \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass für die Funktion $g(x)$ und deren erste Ableitung $g'(x)$ der Zusammenhang $\dfrac{g(x)}{g'(x)} = -x-4$ gilt. **5 BE**

3.0 Weiterhin sind die Funktionen $h(x) = \dfrac{x^2 + 3}{-x^2 - 2}$ und $k(x) = \arctan(h(x))$ mit $D_{h;max} = D_{k;max} = \mathbb{R}$ gegeben.

3.1 Untersuchen Sie die Graphen der Funktionen $h(x)$ und $k(x)$ auf Symmetrie zum Koordinatensystem. **2 BE**

3.2.0 Die erste Ableitung der Funktion $h(x)$ ist gegeben zu $h'(x) = \dfrac{2x}{(-x^2 - 2)^2}$ (Nachweis nicht erforderlich).

3.2.1 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle des Graphen von $h(x)$. **4 BE**

3.2.2 Schließen Sie aus dem Ergebnis der letzten Teilaufgabe auf das Monotonieverhalten des Graphen von $k(x)$. **2 BE**

3.3 Begründen Sie, dass die Funktion $u(x) = h(x)$ mit $D_u = [1; \infty[$ umkehrbar ist und weisen Sie nach, dass ihr Graph durch den Punkt $\left(-\frac{4}{3} \middle| 1\right)$ verläuft. **2 BE**

1.1 Um nachzuweisen, dass es sich um eine Stammfunktion handelt, muss $F'(x) = f(x)$ gezeigt werden. Die erste Ableitung wird mithilfe von Produkt- und Kettenregel berechnet.

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sqrt{x}\cdot e^{-x} \\
F'(x) &= \left[(\sqrt{x})'\cdot e^{-x} + \sqrt{x}\cdot (e^{-x})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{-x} + \sqrt{x}\cdot e^{-x}\cdot(-1) && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot e^{-x} - \sqrt{x}\cdot e^{-x} && \text{(}e^{-x}\text{ Ausklammern)} \\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)\cdot e^{-x} \\
&= f(x) \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

1.2 Für das Volumen muss der Term $\pi\int_1^2 (F(x))^2 dx$ berechnet werden. Zunächst wird das Integral ohne Integrationsgrenzen berechnet. Dafür wird partiell integriert.

$$\begin{aligned}
\int (F(x))^2 dx &= \int (\sqrt{x}\cdot e^{-x})^2 dx = \int (x\cdot e^{-2x}) dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}x - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx \\
&= -\frac{1}{2}xe^{-x} + \int \frac{1}{2}e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{4}e^{-2x} = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}
\end{aligned}$$

Für das Rotationsvolumen gilt damit:

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_1^2 (F(x))^2 dx = \pi\left[\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{-2x}\right]_1^2 = \pi\left(\left(-\frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{4}\right)e^{-2\cdot 2} - \left(-\frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{4}\right)e^{-2\cdot 1}\right) \\
&= \pi\left(\left(-1-\frac{1}{4}\right)e^{-4} - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{-2}\right) = \underline{\underline{\pi\left(-\frac{5}{4}e^{-4} + \frac{3}{4}e^{-2}\right)}}\ [\text{VE}]
\end{aligned}$$

2 Um den gegebenen Zusammenhang zu zeigen, wird zunächst mithilfe der Quotientenregel die erste Ableitung der Funktion $g(x)$ berechnet.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\frac{1}{2}x + 2}{x^2 + 8x + 16} \\
g'(x) &= \left[\frac{(\frac{1}{2}x+2)'\cdot(x^2+8x+16) - (\frac{1}{2}x+2)\cdot(x^2+8x+16)'}{(x^2+8x+16)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot(x^2+8x+16) - (\frac{1}{2}x+2)\cdot(2x+8)}{(x^2+8x+16)^2} && \text{(Anwendung)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\cdot\cancel{(x^2+8x+16)} - \cancel{(x^2+8x+16)}}{(x^2+8x+16)^{\cancel{2}1}} && \text{(Kürzen)} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+8x+16} \quad \text{mit } D_{g'} = D_g
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{2}x+2}{x^2+8x+16} : \frac{-\frac{1}{2}}{x^2+8x+16} = \frac{\frac{1}{2}x+2}{\cancel{x^2+8x+16}} \cdot \frac{\cancel{x^2+8x+16}}{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}x+2\right)\cdot(-2)$$
$$= -x-4 \quad \text{q.e.d.}$$

3.1 Für die Untersuchung der Symmetrie wird $h(-x)$ betrachtet:

$$h(-x) = \frac{(-x)^2+3}{-(-x)^2-2} = \frac{x^2+3}{-x^2-2} = h(x)$$

Wegen $h(-x) = h(x)$ liegt Achsensymmetrie zur y-Achse vor. Dieses Ergebnis wird für die Untersuchung von $k(x)$ verwendet.

$$k(-x) = \arctan(h(-x)) = \arctan(h(x)) = k(x)$$

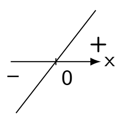
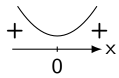
Auch für $k(x)$ liegt also Achsensymmetrie zur y-Achse vor.

Alternative:
Alternativ kann für $h(x)$ auf die Achsensymmetrie geschlossen werden, da nur **geradzahlige** Potenzen von x vorliegen.
Für $k(x) = \arctan(h(x))$ folgt aus der Tatsache, dass $h(x)$ achsensymmetrisch ist außerdem direkt, dass $k(x)$ ebenfalls achsensymmetrisch ist.

3.2.1 Zunächst wird die Nullstelle von $h'(x)$ bestimmt. Diese entspricht der Nullstelle des Zählerterms:

$$h'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$

Anhand einer Vorzeichentabelle wird über das Monotonieverhalten entschieden:

x	$x<0$	$x=0$	$0<x$	Skizzen
$h'(x)$-Zähler: $2x$	$-$	0	$+$	
$h'(x)$-Nenner: $(-x^2-2)^2$	$+$	$+$	$+$	
$h'(x)$	$-$	0	$+$	
G_h	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	

Der Graph von $h(x)$ ist demnach streng monoton fallend im Intervall $]-\infty; 0]$ und streng monoton steigend im Intervall $[0; \infty[$.

3.2.2 Für die Ableitung von $k(x)$ gilt mithilfe der Kettenregel:

$$k(x) = \arctan(h(x)) \qquad k'(x) = \frac{1}{1 + (h(x))^2} \cdot h'(x)$$

Da der Bruch $\frac{1}{1 + (h(x))^2}$ nun aber stets positiv ist, stimmen Vorzeichen der ersten Ableitung von $k(x)$ und $h(x)$ überein, weswegen deren Graphen auch im Monotonieverhalten übereinstimmen. Demnach ist auch der Graph von $k(x)$ streng monoton fallend im Intervall $]-\infty; 0]$ und streng monoton steigend im Intervall $[0; \infty[$.

3.3 Der Graph von $h(x)$ und damit auch der von $u(x)$ ist im Intervall $D_u = [1; \infty[$ stetig und streng monoton steigend. Somit ist die Funktion $u(x)$ umkehrbar.

Um zu zeigen, dass der Graph der Umkehrfunktion $u^{-1}(x)$ durch den Punkt $\left(-\frac{4}{3} \middle| 1\right)$ verläuft, muss nachgewiesen werden, dass der Graph von $u(x)$ durch den Punkt $\left(1 \middle| -\frac{4}{3}\right)$ verläuft. Dazu wird der entsprechende Funktionswert berechnet.

$$u(1) = h(1) = \frac{1^2 + 3}{-1^2 - 2} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

Damit verläuft der Graph der Umkehrfunktion $u^{-1}(x)$ durch den Punkt $\left(-\frac{4}{3} \middle| 1\right)$.

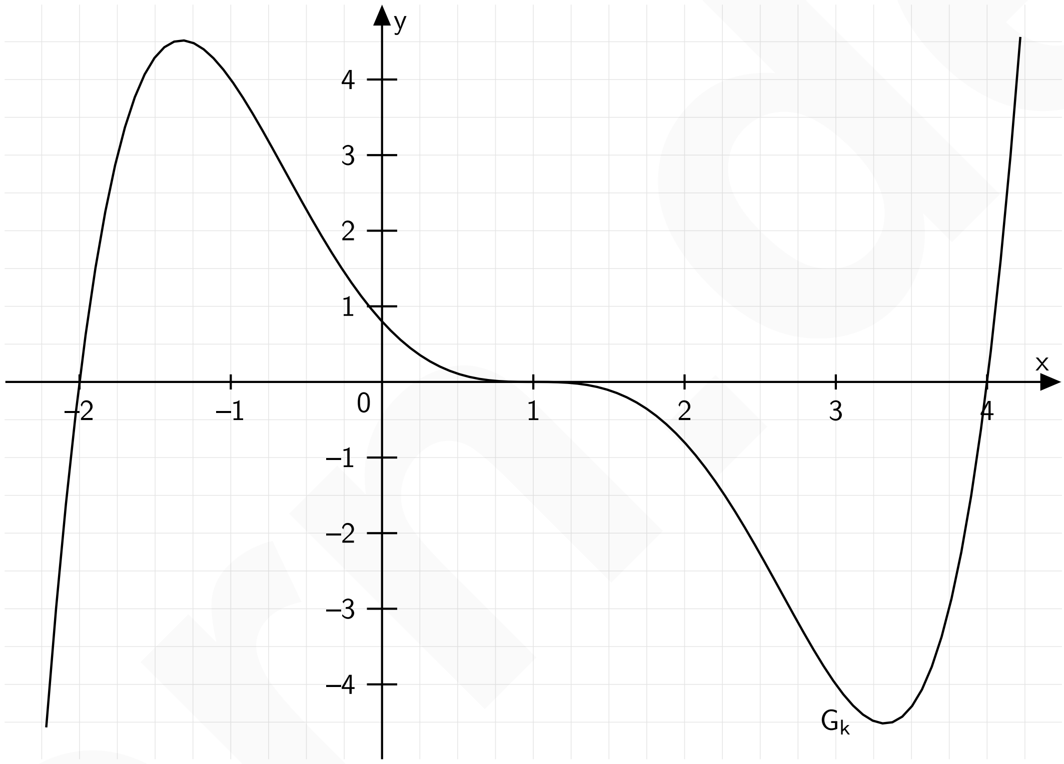
1.0 Gegeben sind die Funktionen $h(x) = x \cdot e^{x+1}$ und $g(x) = (x-1) \cdot e^{x+1}$ mit $D_h = D_g = \mathbb{R}$.

1.1 Weisen Sie nach, dass es sich bei $g(x)$ um eine Stammfunktion von $h(x)$ handelt. **3 BE**

1.2 Untersucht wird nun eine Funktion $f(x)$ für die $f'(x) = g(x)$ und $f''(x) = h(x)$ gilt. Geben Sie das Monotonieverhalten sowie Abszisse von Extrempunkt und Wendepunkt an. **6 BE**

1.3 Bestimmen Sie den exakten Wert des Integrals $\int_0^2 (g(x) - h(x))dx$. **5 BE**

2.0 Nachfolgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen einer Funktion $k(x)$, wobei es sich um ein Polynom fünften Grades handelt und $D_k = \mathbb{R}$ gilt.



2.1 Treffen Sie anhand der gegebenen Abbildung eine Aussage zu Nullstellen, Symmetrie und Monotonie des Graphen von k und geben Sie die Koordinaten der sichtbaren Extrema auf eine Nachkommastelle genau an. **5 BE**

2.2 Zeichnen Sie in die gegebene Abbildung eine qualitativ korrekte Skizze des Graphen der ersten Ableitung der Funktion $k(x)$, die die wesentlichen Eigenschaften und Punkte der Ableitung berücksichtigt. **3 BE**

1.0 Betrachtet werden die Funktionen h mit $h(x) = x \cdot e^{x+1}$ und g mit $g(x) = (x-1) \cdot e^{x+1}$.

1.1 **Nachweis der Stammfunktion**

Um zu zeigen, dass g(x) eine Stammfunktion von h(x) ist, muss $g'(x) = h(x)$ gezeigt werden. Die erste Ableitung wird mithilfe der Produktregel bestimmt:

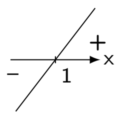
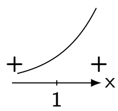
$$\begin{aligned}
g(x) &= (x-1) \cdot e^{x+1} \\
g'(x) &= \left[(x-1)' \cdot e^{x+1} + (x-1) \cdot (e^{x+1})'\right] && \text{(Ansatz Produktregel)} \\
&= 1 \cdot e^{x+1} + (x-1) \cdot e^{x+1} \cdot 1 && \text{(Anwendung)} \\
&= e^{x+1} + x \cdot e^{x+1} - e^{x+1} && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= x \cdot e^{x+1} = h(x) \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

1.2 **Monotonieverhalten und Extrempunkt**

Mit $f'(x) = g(x)$ ist der Term der ersten Ableitung bereits gegeben. Zunächst wird deren Nullstelle bestimmt, die der Nullstelle des linearen Terms entspricht, da die Exponentialfunktion niemals null wird:

$$f'(x) = g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1$$

Um das Monotonieverhalten zu bestimmen und zu ermitteln ob bei $x = 1$ tatsächlich ein Extrempunkt vorliegt, wird eine Vorzeichentabelle der ersten Ableitung betrachtet.

x	$x < 1$	$x = 1$	$1 < x$	Skizzen
$(x-1)$	$-$	0	$+$	
e^{x+1}	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	
G_f	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	

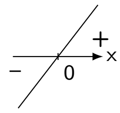
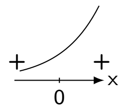
Demnach ist der Graph von f im Intervall $]-\infty; 1]$ streng monoton fallend und im Intervall $[1; \infty[$ streng monoton steigend. Bei $\underline{\underline{x = 1}}$ liegt damit ein Tiefpunkt der Funktion.

Wendepunkt

Auch für die zweite Ableitung $f''(x) = h(x)$ wird zunächst die Nullstelle bestimmt:

$$f''(x) = h(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Um zu bestätigen, dass ein Wendepunkt vorliegt, wird auch hier eine Vorzeichentabelle betrachtet:

x	$x<0$	$x=0$	$0<x$	Skizzen
x	$-$	0	$+$	
e^{x+1}	$+$	$+$	$+$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	
G_f	$\curvearrowright$	WEP	$\curvearrowleft$	

Demnach liegt ein Wendepunkt bei $\underline{\underline{x=0}}$.

1.3 Gesucht ist der exakte Wert des gegebenen Integrals:

$$\int_0^2 (g(x)-h(x))dx = \int_0^2 ((x-1)\cdot e^{x+1} - x\cdot e^{x+1})dx = \int_0^2 (x\cdot e^{x+1} - e^{x+1} - x\cdot e^{x+1})dx$$

$$= \int_0^2 (-e^{x+1})dx = -\int_0^2 e^{x+1}dx = -\left[e^{x+1}\right]_0^2 = -(e^3-e^1) = \underline{\underline{e^1-e^3}}$$

2.1 **Nullstellen**

Die Nullstellen lassen sich aus der Abbildung ablesen zu $\underline{\underline{x=-2}}$, $\underline{\underline{x=1}}$ und $\underline{\underline{x=4}}$.

Monotonie und Extrema

Im Rahmen der Ablesegenauigkeit liegt ein Hochpunkt mit den Koordinaten $\underline{\underline{HOP(-1{,}3\,|\,4{,}5)}}$ und ein Tiefpunkt mit den Koordinaten $\underline{\underline{TIP(3{,}3\,|\,-4{,}5)}}$ vor.

Daraus ergibt sich, dass der Graph von k in den Intervallen $]-\infty; -1{,}3]$ und $[3{,}3; \infty[$ streng monoton steigend und im Intervall $[-1{,}3; 3{,}3]$ streng monoton fallend ist.

Symmetrie

Aus dem Verlauf des Graphen ergibt sich, dass weder Punkt- noch Achsensymmetrie zum Koordinatensystem vorliegt.

Hinweis (Angabe nicht erforderlich): Anhand des gezeigten Verlaufs des Graphen und der Werte der Nullstellen und Extrempunkte ergibt sich, dass Punktsymmetrie zum Punkt $(1\,|\,0)$ vorliegt.

2.2 Aus dem Verlauf des gezeigten Graphen ergeben sich folgende wesentliche Merkmale und wichtige Punkte für den Graphen der ersten Ableitung:

- G_k ist in den Intervallen $]-\infty; -1{,}3]$ und $[3{,}3; \infty[$ streng monoton steigend und im Intervall $[-1{,}3; 3{,}3]$ streng monoton fallend

$\Rightarrow$ ist G_k steigend, verläuft $G_{k'}$ unterhalb der x-Achse; ist G_k fallend, verläuft $G_{k'}$ oberhalb der x-Achse

$\Rightarrow$ je steiler der Verlauf von G_k, desto weiter liegen die Werte von $k'(x)$ an dieser Stelle von der x-Achse entfernt

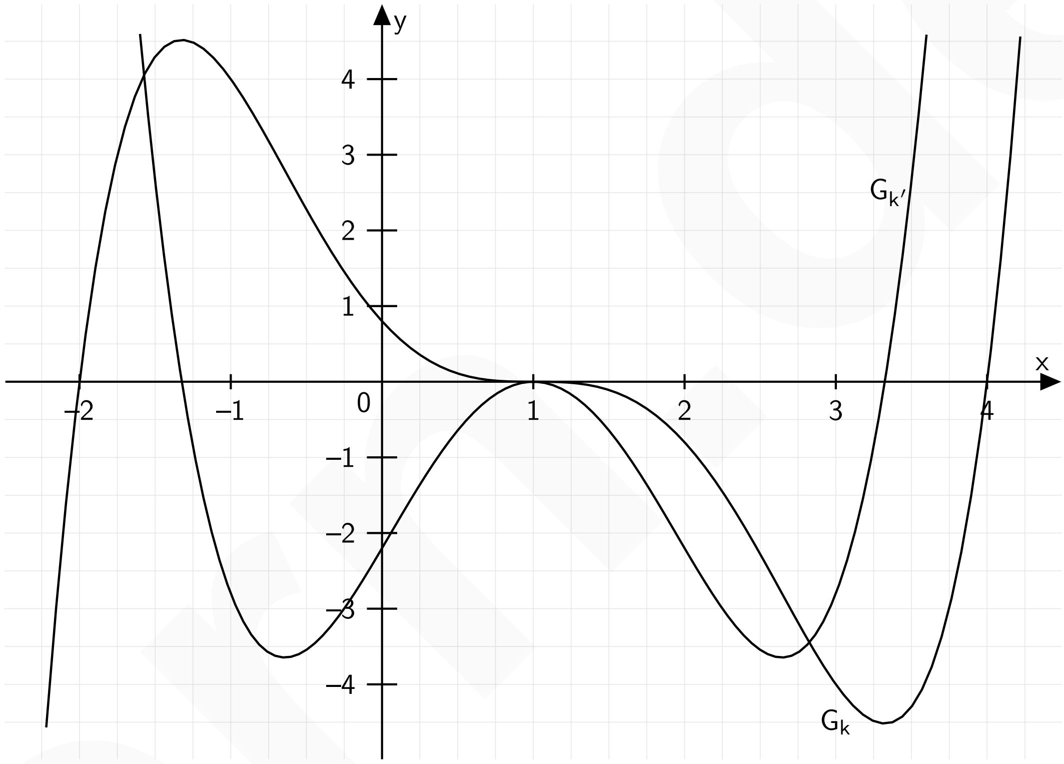
- $k(x)$ hat bei $x \approx -1{,}3$ und $x \approx 3{,}3$ eine Extremstelle

$\Rightarrow$ $G_{k'}$ hat bei $x = -1{,}3$ und $x = 3{,}3$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel

- $k(x)$ hat bei $x = 1$ einen Terrassenpunkt

$\Rightarrow$ $G_{k'}$ hat bei $x =$ eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel (Berührungspunkt mit der x-Achse)

Vollständige Darstellung:



Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1 In einem Bergwerk werden Besichtigungstouren angeboten. Als besondere Attraktion endet die Bergwerkstour dabei mit der Fahrt einer traditionellen Bahn, mit welcher der Bergwerksstollen verlassen wird. Die Bahn besteht aus einzelnen Wagen, wobei pro Wagen acht Personen hintereinandersitzend befördert werden können.

Das Ehepaar Müller nimmt an einer solchen Besichtigung teil und nimmt mit sechs weiteren Touristen auf einem solchen Wagen Platz. Geben Sie jeweils einen Term zur Berechnung der Anzahl der verschiedenen Belegungen an, die in den folgenden Fällen jeweils möglich ist, wenn zwischen den einzelnen Gästen unterschieden wird.

a) Auf dem Wagen wird rein zufällig Platz genommen.

b) Die Ehepartner sitzen hintereinander.

c) Die Ehepartner sitzen ganz vorn, also auf dem 1. und 2. Platz von vorn.

4 BE

2.0 Der Eingang zum Bergwerk befindet sich an einem Berg. Die Strecke von der Talstation zur Bergstation, wo sich der Eingang zum Bergwerk befindet, kann entweder gewandert oder mit einer Seilbahn gefahren werden. An der Talstation werden deshalb alle Besucher gefragt, ob sie die Seilbahn (S) benutzen oder nicht ($\overline{S}$) und ob sie oben angekommen das Bergwerk besichtigen wollen (B) oder nur die Aussicht genießen wollen. ($\overline{B}$). Die Besucherstatistiken haben gezeigt, dass 65 % der Besucher mit der Seilbahn fahren und das Bergwerk besichtigen. Von allen Besuchern nimmt nur jeder vierte die Seilbahn und sieht sich nicht das Bergwerk an.

Die Wahl eines zufällig herausgegriffenen Besuchers wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

2.1 Zusätzlich ist die Wahrscheinlichkeit $P_B(S) = \frac{13}{14}$ gegeben. Erstellen Sie eine vollständige Vierfeldertafel. Bestimmen Sie weiterhin die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig gewählter Besucher...

a) ...das Bergwerk besichtigt und nicht mit der Seilbahn fährt.

b) ...der sicher mit der Seilbahn fährt nicht das Bergwerk besichtigt.

6 BE

2.2 Berechnen Sie, aus wie vielen Besucher die Statistik gewonnen wurde, wenn 1600 Besucher nicht die Seilbahn genutzt haben und nicht ins Bergwerk gegangen sind. **2 BE**

1 Auf einem Wagen mit acht freien Plätzen findet das Ehepaar Müller und zusätzlich sechs weitere Touristen Platz.

a) Wenn die Plätze rein zufällig besetzt werden, so gibt es für den ersten Fahrgast (egal ob Ehepartner Müller oder anderer Tourist) noch 8 freie Plätze, für den zweiten noch 7 usw.. Damit gibt es $\underline{\underline{8!}}$ Möglichkeiten. (Fakultät muss nicht berechnet werden).

b) Es gibt folgende Anordnungen, wenn die beiden Ehepartner (M) immer hintereinander sitzen wollen:

MMTTTTTT, TMMTTTTT, TTMMTTTT, TTTMMTTT,
TTTTMMTT, TTTTTMMT, TTTTTTMM

Es gibt also 7 Anordnungen. Die beiden Plätze des Ehepaars Müller können dabei jeweils von dem einen oder dem anderen Ehepartner besetzt werden $(2 \cdot 7)$. Für die restlichen fünf freien Plätze gibt es wie in Teilaufgabe a) 6! Möglichkeiten. Damit gibt es also insgesamt $\underline{\underline{2 \cdot 7 \cdot 6!}}$ Möglichkeiten.

c) Es gibt zwei Möglichkeiten die Ehepartner auf den vordersten Sitzplätzen anzuordnen. Wiederum gibt es für die restlichen sechs freien Plätze 6! Möglichkeiten, sodass es insgesamt $\underline{\underline{2 \cdot 6!}}$ Möglichkeiten gibt.

2.1 Gegeben ist $P(B \cap S) = 0{,}65$ und $P(\overline{B} \cap S) = \frac{1}{4} = 0{,}25$. Zudem gilt:

$$\begin{aligned} && P_B(S) = \frac{P(B \cap S)}{P(B)} &= \frac{13}{14} && | \cdot 14 \\ \Longleftrightarrow && 14 \cdot \frac{0{,}65}{P(B)} &= 13 && | \cdot P(B) \\ \Longleftrightarrow && 9{,}1 &= 13 \cdot P(B) && | : 13 \\ \Longleftrightarrow && P(B) &= 0{,}7 \end{aligned}$$

Damit kann eine Vierfeldertafel erstellt und entsprechend ergänzt werden:

	B	$\overline{B}$	
S	0,65	0,25	
$\overline{S}$			
	0,7		1

$\Rightarrow$

	B	$\overline{B}$	
S	0,65	0,25	0,9
$\overline{S}$	0,05	0,05	0,1
	0,7	0,3	1

Damit können die gesuchten Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden:

a) $\underline{\underline{P(B \cap \overline{S}) = 0{,}05}}$

b) Hier handelt es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, da die Wahrscheinlichkeit für $\overline{B}$ gesucht ist, unter der Voraussetzung, dass S bereits eingetreten ist:

$$P_S(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap S)}{P(S)} = \frac{0{,}25}{0{,}9} \approx \underline{\underline{0{,}278}}$$

2.2 Aus der Vierfeldertafel kann $P(\overline{B} \cap \overline{S}) = 0{,}05$ abgelesen werden. Dies entspricht einer Anzahl von 1600 Personen. Für die Gesamtzahl n folgt daraus:

$$\begin{aligned} \text{Prozentsatz} &= \frac{\text{Prozentwert}}{\text{Gesamtzahl } n} && \\ 0{,}05 &= \frac{1600}{n} && \mid \cdot n \\ \Longleftrightarrow \quad 0{,}05n &= 1600 && \mid \cdot 20 \\ \Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{n}} &\underline{\underline{= 32000}} && \end{aligned}$$

1 In einem Café werden verschiedene Arten von Getränken und diverse Kuchen, Torten und anderes Gebäck angeboten. Erfahrungsgemäß bestellen 20 % der Kunden ausschließlich ein Getränk ohne etwas dazu zu essen.
Es werden nun die Bestellungen der nächsten zehn Kunden betrachtet. Berechnen Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten. Geben Sie hierzu auch den Rechenweg an.

E_1: „Jeder der Kunden bestellt ausschließlich ein Getränk."

E_2: „Nur die ersten drei Kunden bestellen ausschließlich ein Getränk."

E_3: „Nur der erste, der dritte und der achte Kunden bestellen ausschließlich ein Getränk."

3 BE

2 Die angebotenen Speisen werden in die Kategorien Torte (T), Kuchen (K) und Gebäck (G) unterteilt. Nachfolgend werden nur Kunden betrachtet, die mindestens eines der angebotenen Speisen bestellen, dabei aber auch mehr als eines bestellen können.
Aus den Erfahrungen der bisherigen Bestellungen ist bekannt, dass jeder dritte Kunde ein Stück Torte bestellt. Unabhängig davon entschließt sich die Hälfte der Kunden für ein Stück Kuchen. Wurde nur Torte oder nur Kuchen bestellt, entscheiden sich 40 % der Kunden noch für ein Stück Gebäck. Wurde sowohl Torte als auch Kuchen bestellt, nehmen nur 20 % der Kunden ein weiteres Stück Gebäck.
Die Bestellung eines zufälligen Kunden wird als Zufallsexperiment aufgefasst. Bestimmen Sie mithilfe eines vollständigen Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde genau zwei der drei angebotenen Speisen bestellt. **5 BE**

3 Beim Verlassen des Cafés werden die Kunden nach ihrer Zufriedenheit befragt. Dabei geben diese an, ob sie zufrieden (Z) oder unzufrieden ($\overline{Z}$) sind und ob sie eine Speise (S) gewählt hatten oder ausschließlich ein Getränk ($\overline{S}$) bestellt haben.
Die bereits bekannte Quote von 20 % der Kunden die ausschließlich ein Getränk bestellen bestätigt sich auch in der Umfrage. Unzufrieden ist nur jeder zwanzigste der befragten Kunden. 695 Kunden haben eine Speise bestellt und sind zufrieden mit ihrem Besuch. Insgesamt wurden 900 Kunden befragt.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufälliger befragter Kunde, welcher bereits eine Speise gewählt hat, unzufrieden mit seinem Besuch war. **4 BE**

1 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufälliger Kunde ausschließlich ein Getränk bestellt beträgt 0,2. Damit kann jeweils ein Term zur Berechnung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse angegeben werden:
Wenn alle zehn Kunden ausschließlich ein Getränk bestellen, so gilt für die Wahrscheinlichkeit:

$$P(E_1) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = \underline{\underline{0{,}2^{10}}}$$

Nur die ersten drei Kunden bestellen ausschließlich ein Getränk. Somit gilt für die Wahrscheinlichkeit:

$$P(E_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = \underline{\underline{0{,}8^7 \cdot 0{,}2^3}}$$

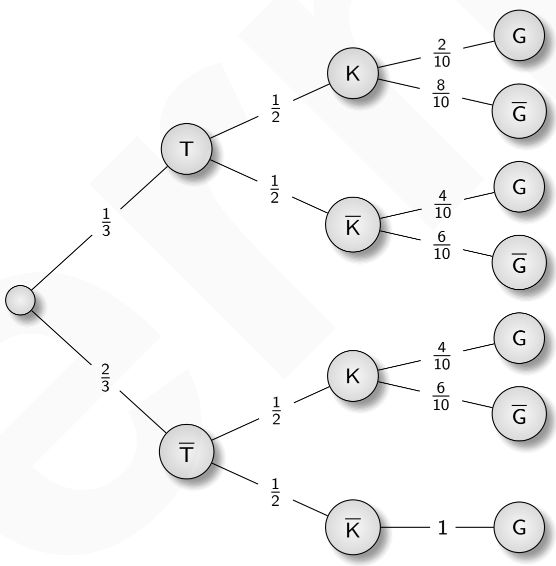
Für das dritte Ereignis bestellen nur der erste, der dritte und der achte Kunde ausschließlich ein Getränk. Somit gilt:

$$P(E_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = \underline{\underline{0{,}8^7 \cdot 0{,}2^3}}$$

(Anmerkung: Die Angabe eines Terms reicht, es müssen keine Prozentangaben gemacht werden.)

2 Mit den gegebenen Werten kann ein Baumdiagramm erstellt werden.
Dabei stehen T, K und G jeweils für die Bestellung der verschiedenen Speisen, während $\overline{T}$, $\overline{K}$ und $\overline{G}$ dafür stehen, dass der Kunde sich gegen diese Speisen entschieden hat.

Anmerkung: In der letzten Zeile beim letzten Pfad muss eine Wahrscheinlichkeit von 100 % = 1 vorliegen, da nur Kunden betrachtet werden, die mindestens eine Art Speise bestellt haben..



$$P(\{TKG\}) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{10} = \tfrac{2}{60}$$
$$P(\{TK\overline{G}\}) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{8}{10} = \tfrac{8}{60}$$
$$P(\{T\overline{K}G\}) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{10} = \tfrac{4}{60}$$
$$P(\{T\overline{K}\overline{G}\}) = \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{6}{10} = \tfrac{6}{60}$$
$$P(\{\overline{T}KG\}) = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{4}{10} = \tfrac{8}{60}$$
$$P(\{\overline{T}K\overline{G}\}) = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{6}{10} = \tfrac{12}{60}$$
$$P(\{\overline{T}\overline{K}G\}) = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1 = \tfrac{20}{60}$$

Es werden die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse addiert, die genau zwei bestellten Speisearten entsprechen:

$$P(\{TK\overline{G}; T\overline{K}G; \overline{T}KG\}) = \frac{8}{60} + \frac{4}{60} + \frac{8}{60} = \frac{20}{60} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

3 Insgesamt bestellen $0{,}2 \cdot 900 = 180$ Kunden ausschließlich ein Getränk. Jeder zwanzigste Kunde, also insgesamt $\frac{1}{20} \cdot 900 = 45$ Kunden sind unzufrieden. Mit den gegebenen Zahlenwerten kann dann eine Vierfeldertafel erstellt werden:

	S	$\overline{S}$	
Z	695		
$\overline{Z}$			45
		180	900

$\Rightarrow$

	S	$\overline{S}$	
Z	695	160	855
$\overline{Z}$	25	20	45
	720	180	900

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen sich dann mithilfe der Zahlen aus der Vierfeldertafel wie folgt:

$$P_S(\overline{Z}) = \frac{P(\overline{Z} \cap S)}{P(S)} = \frac{25}{720} = \frac{5}{\underline{\underline{144}}}$$

1.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 5}{1 - x}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion an und untersuchen Sie sie auf Nullstellen. **2 BE**

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern des Definitionsbereichs und ermitteln Sie die Gleichungen aller Asymptoten. **4 BE**

1.3 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten sowie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f.
$\left[\text{Mögliches Zwischenergebnis: } \dfrac{-2x^2 + 4x}{(1 - x)^2}\right]$ **6 BE**

1.4.0 Weiterhin ist die Funktion $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ mit Definitionsbereich $D_F =]-\infty; 1[$ gegeben.

1.4.1 Geben Sie mithilfe der Ergebnisse der letzten Teilaufgaben das Monotonieverhalten und die Abszisse möglicher Wendepunkte an. **2 BE**

1.4.2 Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung des Funktionsterms von $F(x)$. **4 BE**

1.5 Untersuchen Sie die Funktion $g(x) = \arctan(f(x))$ hinsichtlich ihrer Definitionsmenge, Nullstellen, Asymptoten, Monotonieverhalten und der Abszissen der Extrema. **5 BE**

2.0 Gegeben ist die Funktion $h(x) = 10 \cdot e^{-0,2x}$ mit $D_h = \mathbb{R}$ und zusätzlich die Funktionen $p(x) = 0{,}1 \cdot (x - a)^2 + b$ und $\ell(x) = cx + d$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

Die Funktionen $p(x)$ und $\ell(x)$ sollen dabei im Intervall $[0; 5]$ als Näherungen für die Funktion $h(x)$ betrachtet werden, um verschiedene Rechnungen erleichtern zu können. Dazu ist festgelegt, dass die Funktionswerte von $h(x)$, $p(x)$ und $\ell(x)$ jeweils an den Stellen $x = 0$ und $x = 5$ übereinstimmen sollen.

2.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a,b,c und d. Runden Sie, sofern nötig, auf zwei Nachkommastellen genau.
[Zwischenergebnis: $c = -1{,}26$; $d = 10$] **3 BE**

2.2 Die Rotationsvolumina der Körper, die bei Rotation von $h(x)$, $p(x)$ und $\ell(x)$ um die x-Achse im Intervall $[0; 5]$ entstehen, sollen verglichen werden. Diese werden entsprechend der Funktionsgleichung als V_h, V_p und V_ℓ bezeichnet, wobei $V_p = 700{,}8\,\text{VE}$ bereits vorgegeben ist. Ermitteln Sie, um wieviel Prozent (gerundet auf eine Nachkommastelle) die Werte V_p und V_ℓ größer sind als V_h. **7 BE**

3.0 In einem Gleichstromkreis befindet sich eine Spule. Zusätzlich zum üblichen ohmschen Widerstand muss deswegen zusätzlich ein induktiver Widerstand berücksichtigt werden. Betrachtet man den Einschaltvorgang in diesem Stromkreis, so wird der Verlauf des Stromes in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 0$ beschrieben durch die Differentialgleichung $I(t) \cdot R = U - L \cdot \dot{I}(t)$.

Die Werte R, U und L sind dabei abhängig von den verwendeten Bauteilen. Einheiten bleiben im Folgenden unberücksichtigt.

3.1 Da es sich um einen Einschaltvorgang handelt, ist $I(0) = 0$. Bestimmen Sie die spezielle Lösung der gegebenen Differentialgleichung.

$\left[\text{Mögliches Ergebnis: } I(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)\right]$ **7 BE**

3.2 Bestimmen Sie für $U = 230$, $R = 46$ und $L = 100$ zu welchem Zeitpunkt $I = 3$ erreicht ist. Runden Sie den Wert für t auf eine Nachkommastelle. **3 BE**

1.0 Betrachtet wird die Funktion f mit $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 5}{1 - x}$.

1.1 **Definitionsmenge**

Da nie durch null geteilt werden darf, muss auch der Nennerterm stets ungleich null sein.

$$\begin{aligned} & 1 - x \neq 0 \qquad | + x \\ \Longleftrightarrow \quad & x \neq 1 \end{aligned}$$

Die Definitionsmenge lautet demnach $\underline{\underline{D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}}}$.

Nullstellen

Die Nullstellen der gebrochenrationalen Funktion entsprechen denen des Zählerterms, bei dem es sich um einen quadratischen Term handelt. Es wird die Diskriminante untersucht:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = 25 - 40 = -15 < 0$$

Da die Diskriminante des Terms kleiner als null ist, hat die Funktion f(x) keine Nullstellen.

1.2 **Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs**

$$x \to -\infty: f(x) = \frac{\overbrace{2x^2 - 5x + 5}^{\to\infty}}{\underbrace{1 - x}_{\to\infty}} \to \infty \quad \text{(da ZG>NG)}$$

$$x \to \infty: f(x) = \frac{\overbrace{2x^2 - 5x + 5}^{\to\infty}}{\underbrace{1 - x}_{\to-\infty}} \to -\infty \quad \text{(da ZG>NG)}$$

$$x \to 1^-: f(x) = \frac{\overbrace{2x^2 - 5x + 5}^{\to 2}}{\underbrace{1 - x}_{\to 0^+}} \to \infty$$

$$x \to 1^+: f(x) = \frac{\overbrace{2x^2 - 5x + 5}^{\to 2}}{\underbrace{1 - x}_{\to 0^-}} \to -\infty$$

Gleichungen aller Asymptoten

Zunächst wird eine Polynomdivision durchgeführt.

$$\begin{array}{rrrrl} & (2x^2 & -5x & +5) & : (-x+1) = \overbrace{-2x+3}^{\text{ganzrat. Teil}} + \overbrace{\frac{2}{1-x}}^{\text{echt gebr.rat. Teil}} \\ - & (2x^2 & -2x &) & \\ \hline & & -3x & +5 & \\ & - & (-3x & +3) & \\ \hline & & & 2 & \end{array}$$

Aus dem ganzrationalen Teil der Funktion ergibt sich die Gleichung einer schiefen Asymptote zu $\underline{\underline{y = -2x + 3}}$. Aus dem Nennerterm des echt gebrochen rationalen Anteils (oder dem Verhalten für $x \to 1^{\pm}$) ergibt sich eine senkrechte Asymptote mit der Gleichung $\underline{\underline{x = 1}}$. Das Grenzwertverhalten für $x \to \pm\infty$ zeigt, dass keine waagrechte Asymptote vorliegt.

1.3 Ermitteln der ersten Ableitung

Mithilfe der Quotientenregel wird die erste Ableitung bestimmt:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 5}{1 - x}$$

$$f'(x) = \left[\frac{(2x^2 - 5x + 5)' \cdot (1 - x) - (2x^2 - 5x + 5) \cdot (1 - x)'}{(1 - x)^2}\right] \qquad \text{(Ansatz Quotientenregel)}$$

$$= \frac{(4x - 5) \cdot (1 - x) - (2x^2 - 5x + 5) \cdot (-1)}{(1 - x)^2} \qquad \text{(Anwendung)}$$

$$= \frac{4x - 4x^2 - 5 + 5x + 2x^2 - 5x + 5}{(1 - x)^2} \qquad \text{(Zusammenfassen)}$$

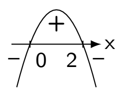
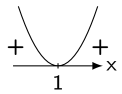
$$= \frac{-2x^2 + 4x}{(1 - x)^2} \quad \text{mit } D_{f'} = D_f \qquad \text{(Zur Kontrolle angegeben)}$$

Monotonieverhalten und Art und Koordinaten der Extrempunkte

Zunächst werden die Nullstellen der ersten Ableitung ermittelt, die den Nullstellen des Zählerterms entsprechen:

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x^2 + 4x = x(-2x + 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = 2$$

Zur weiteren Betrachtung wird eine Monotonietabelle erstellt.

x	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x$	Skizzen
$f'(x)$-Zähler: $-2x^2 + 4x$	–	0	+		+	0	–	
$f'(x)$-Nenner: $(1 - x)^2$	+	+	+		+	+	+	
$f'(x)$	–	0	+	n.def.	+	0	–	
G_f	↘	TIP	↗	n.def.	↗	HOP	↘	

Aus der Tabelle ergibt sich, dass der Graph der Funktion $f(x)$ in den Intervallen $]-\infty; 0]$ und $[2; \infty[$ streng monoton fallend, und in den Intervallen $[0; 1[$ und $]1; 2]$ streng monoton steigend ist. Für die Koordinaten der Extrempunkte werden noch die Funktionswerte an den entsprechenden Stellen berechnet.

$$f(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 5}{1 - 0} = 5 \qquad f(2) = \frac{2 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 5}{1 - 2} = \frac{3}{-1} = -3$$

Damit ergeben sich die Koordinaten der relativen Extrempunkte zu $\underline{\underline{\text{TIP}\,(0\,|\,5)}}$ und $\underline{\underline{\text{HOP}\,(2\,|-3)}}$.

1.4.0 Betrachtet wird die Funktion F mit $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ mit $D_F =]-\infty; 1[$.

1.4.1 **Monotonieverhalten**

Aus dem Verhalten der Funktionswerte für $x \to -\infty$ und $x \to 1^-$, dem Fehlen von Nullstellen und der Tatsache, dass f(x) im Intervall $]-\infty; 1[$ stetig ist, folgt, dass überall auf D_F $f(x) > 0$ gilt. Wegen $F'(x) = f(x)$ folgt also, dass die erste Ableitung von F(x) stets positiv ist und der Graph von F(x) im gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend ist.

Abszisse der Wendepunkte

Da $F''(x) = f'(x)$ gilt, liegen die Wendestellen der Funktion F(x) dort, wo f(x) Extremstellen aufweißt. Diese liegen bei f(x) bei $x = 0$ und $x = 2$. Berücksichtigt man den Definitionsbereich von F(x), so folgt, dass eine Wendestelle von F(x) bei $\underline{\underline{x = 0}}$ liegt.

1.4.2 **Integralfreie Darstellung**

Zu Berechnung der integralfreien Darstellung muss der Funktionsterm von f(x) integriert werden. Dafür wird die alternative Darstellung verwendet, die man durch Polynomdivision erhält (siehe Teilaufgabe zu Asymptoten), da sich diese aufgrund der einzelnen Summanden am besten integrieren lässt:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(-2t + 3 + \frac{2}{1-t}\right) dt = \left[-t^2 + 3t - 2\ln|1-t|\right]_0^x$$
$$= -x^2 + 3x - 2\underbrace{\ln(1-x)}_{\substack{\text{Betrag entfällt,}\\ \text{da } x<1}} - (-0^2 + 3\cdot 0 - 2\ln(1-0)) = \underline{\underline{-x^2 + 2x - 2\ln(1-x)}}$$

1.5 Untersucht wird nun die Funktion g mit $g(x) = \arctan(f(x))$.

Definitionsmenge

Grundsätzlich hat die Arcustangensfunktion keine Einschränkungen im Definitionsbereich. Die einzigen Einschränkungen der Funktion g(x) sind deshalb die der Funktion f(x), weshalb $\underline{\underline{D_g = \mathbb{R}\setminus\{1\}}}$ gilt.

Nullstellen

Wegen $\arctan(0) = 0$ stimmen die Nullstellen von g(x) und f(x) überein. Da f(x) keine Nullstellen hat, weißt auch g(x) keine auf.

Asymptoten

$$x \to 1^-: g(x) = \arctan(\overbrace{f(x)}^{\to\infty}) \to \frac{\pi}{2} \qquad x \to 1^+: g(x) = \arctan(\overbrace{f(x)}^{\to-\infty}) \to -\frac{\pi}{2}$$

Demnach liegt **keine** senkrechte Asymptote vor.

$$x \to -\infty: \; g(x) = \arctan(\overbrace{f(x)}^{\to\infty}) \to \frac{\pi}{2} \qquad x \to \infty: \; g(x) = \arctan(\overbrace{f(x)}^{\to -\infty}) \to -\frac{\pi}{2}$$

Es ergibt sich jeweils eine waagrechte Asymptote mit den Gleichungen $\underline{\underline{y = \frac{\pi}{2}}}$ und $\underline{\underline{y = -\frac{\pi}{2}}}$.

Monotonieverhalten und Abszissen der Extrema
Für die erste Ableitung der Funktion gilt:

$$g'(x) = \frac{1}{1 + (f(x))^2} \cdot f'(x)$$

Da $1 + (f(x))^2$ im Nenner stets positiv ist, stimmen $g'(x)$ und $f'(x)$ im Vorzeichen, und damit auch die Graphen von $g(x)$ und $f(x)$ im Verlauf überein. Somit ist der Graph von $g(x)$ in den Intervallen $]-\infty; 0]$ und $[2; \infty[$ streng monoton fallend, und in den Intervallen $[0; 1[$ und $[1; 2[$ streng monoton steigend ist. Die Abszissen der Extrempunkte sind also $\underline{\underline{x = 0}}$ und $\underline{\underline{x = 2}}$.

2.1 Zunächst werden die Funktionswerte an der Stelle $x = 0$ und $x = 5$ bestimmt:

$$\begin{aligned} h(0) &= 10 \cdot e^{-0{,}2\cdot 0} = 10 & h(5) &= 10 \cdot e^{-0{,}2\cdot 5} = 10e^{-1} \\ p(0) &= 0{,}1 \cdot (0-a)^2 + b = 0{,}1a^2 + b & p(5) &= 0{,}1 \cdot (5-a)^2 + b \\ & & &= 0{,}1 \cdot (25 - 10a + a^2) + b \\ \ell(0) &= c \cdot 0 + d = d & \ell(5) &= c \cdot 5 + d = 5c + d \end{aligned}$$

Die Funktionswerte an einer Stelle sollen dabei jeweils übereinstimmen. Für die Parabel folgt:

$$\begin{aligned} & & p(0) &= h(0) & \\ &\iff & 0{,}1a^2 + b &= 10 & \quad |-0{,}1a^2 \\ &\iff & b &= 10 - 0{,}1a^2 & \end{aligned}$$

Eingesetzt in die zweite Gleichung der Parabel:

$$\begin{aligned} & & p(5) &= h(5) & \\ &\iff & 0{,}1 \cdot (25 - 10a + a^2) + b &= 10e^{-1} & \\ &\iff & 0{,}1 \cdot (25 - 10a + a^2) + 10 - 0{,}1a^2 &= 10e^{-1} & \\ &\iff & 2{,}5 - a + 0{,}1a^2 + 10 - 0{,}1a^2 &= 10e^{-1} & \\ &\iff & -a + 12{,}5 &= 10e^{-1} & \quad |-12{,}5 \\ &\iff & -a &= 10e^{-1} - 12{,}5 & \quad |\cdot(-1) \\ &\iff & a &= -10e^{-1} + 12{,}5 & \\ &\iff & \underline{\underline{a}} &\underline{\underline{\approx 8{,}82}} & \end{aligned}$$

Eingesetzt in die obige Gleichung folgt:

$$b = 10 - 0{,}1a^2 = 10 - 0{,}1 \cdot 8{,}82^2 \approx \underline{\underline{2{,}22}}$$

Für die lineare Funktion folgt aus $h(0) = \ell(0)$ direkt $d = \underline{\underline{10}}$. Setzt man dies in die zweite Gleichung der linearen Funktion ein, so folgt:

$$\begin{aligned} && \ell(5) &= h(5) & \\ \Longleftrightarrow && 5c + 10 &= 10e^{-1} & \mid -10 \\ \Longleftrightarrow && 5c &= 10e^{-1} - 10 & \mid :5 \\ \Longleftrightarrow && c &= 2e^{-1} - 2 & \\ \Longleftrightarrow && \underline{\underline{c}} &\underline{\underline{\approx -1{,}26}} & \end{aligned}$$

2.2 Zunächst wird das Rotationsvolumen für die Funktion $h(x)$ berechnet. Dabei werden die Potenzgesetze verwendet.

$$\begin{aligned} V_h &= \pi \int_0^5 (h(x))^2 dx = \pi \int_0^5 (10e^{-0{,}2x})^2 dx = 100\pi \int_0^5 e^{-0{,}4x} dx = 100\pi \left[-\frac{1}{0{,}4} e^{-0{,}4x}\right]_0^5 \\ &= 100\pi \left[-2{,}5e^{-0{,}4x}\right]_0^5 = 100\pi \left(-2{,}5e^{-2} - (-2{,}5e^0)\right) \approx 679{,}1\,[\text{VE}] \end{aligned}$$

Weiterhin wird das Rotationsvolumen zur linearen Funktion $\ell(x) = -1{,}26x + 10$ ermittelt:

$$\begin{aligned} V_\ell &= \pi \int_0^5 (\ell(x))^2 dx = \pi \int_0^5 (-1{,}26x + 10)^2 dx = \pi \int_0^5 (1{,}5867x^2 - 25{,}2x + 100) dx \\ &= \pi \left[1{,}5867 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 25{,}2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 100x\right]_0^5 = \pi \left(1{,}5867 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5^3 - 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2 + 100 \cdot 5 - 0\right) \\ &\approx 789{,}0\,[\text{VE}] \end{aligned}$$

Schließlich kann die prozentuale Abweichung bestimmt werden:

$$\frac{V_p}{V_h} = \frac{700{,}8}{679{,}1} \approx 1{,}032 = 103{,}2\,\%$$
$$\frac{V_\ell}{V_h} = \frac{789{,}0}{679{,}1} \approx 1{,}162 = 116{,}2\,\%$$

Der Wert von V_p ist demnach $\underline{\underline{3{,}2\,\%}}$ und der Wert von V_ℓ $\underline{\underline{16{,}2\,\%}}$ größer als der von V_h.

3.1 Die gegebene Differentialgleichung wird mithilfe der Trennung der Variablen gelöst.

$$\begin{aligned} && I \cdot R &= U - L \cdot \dot{I} & \mid + L \cdot \dot{I} \\ \Longleftrightarrow && I \cdot R + L \cdot \dot{I} &= U & \mid - I \cdot R \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad && L\cdot \dot{I} &= U - I\cdot R && \Big|\cdot \frac{1}{L}\\
\Longleftrightarrow \quad && \frac{dI}{dt} &= (U - I\cdot R)\cdot \frac{1}{L} && \big|\cdot dt\\
\Longleftrightarrow \quad && dI &= (U - I\cdot R)\cdot \frac{dt}{L} && \big|:(U - I\cdot R)\\
\Longleftrightarrow \quad && \frac{1}{U - I\cdot R}dI &= \frac{1}{L}dt &&\\
\Longleftrightarrow \quad && \int \frac{1}{U - I\cdot R}dI &= \int \frac{1}{L}dt &&\\
\Longleftrightarrow \quad && -\frac{1}{R}\ln(|U - I\cdot R|) &= \frac{t}{L} + C && \big|\cdot(-R)\\
\Longleftrightarrow \quad && \ln(|U - I\cdot R|) &= -\frac{R}{L}t + C* && \big|\exp(\,)\\
\Longleftrightarrow \quad && |U - I\cdot R| &= e^{-\frac{R}{L}t + C*} &&\\
\Longleftrightarrow \quad && |U - I\cdot R| &= e^{-\frac{R}{L}t}\cdot e^{C*} &&\\
\Longleftrightarrow \quad && U - I\cdot R &= e^{-\frac{R}{L}t}\cdot D &&
\end{aligned}
$$

Dabei ist $C, C*, D \in \mathbb{R}$. Die Betragsstriche entfallen, da das Vorzeichen der Konstante D beliebig gewählt werden kann. Weiterhin folgt:

$$
\begin{aligned}
&& U - I\cdot R &= e^{-\frac{R}{L}t}\cdot D && \big|-U\\
\Longleftrightarrow \quad && -I\cdot R &= e^{-\frac{R}{L}t}\cdot D - U && \Big|\cdot\left(-\frac{1}{R}\right)\\
\Longleftrightarrow \quad && I(t) &= \frac{U}{R} - \frac{D}{R}e^{-\frac{R}{L}t} &&
\end{aligned}
$$

Für die spezielle Lösung ist weiterhin gegeben, dass $I(0) = 0$ ist. Damit folgt:

$$
\begin{aligned}
&& I(0) &= 0 &&\\
\Longleftrightarrow \quad && \frac{U}{R} - \frac{D}{R}e^{-\frac{R}{L}\cdot 0} &= 0 &&\\
\Longleftrightarrow \quad && \frac{U}{R} - \frac{D}{R} &= 0 && \Big|-\frac{U}{R}\\
\Longleftrightarrow \quad && -\frac{D}{R} &= -\frac{U}{R} && \big|\cdot(-R)\\
\Longleftrightarrow \quad && D &= U &&
\end{aligned}
$$

Eingesetzt ergibt sich die gesuchte spezielle Lösung:

$$
\underline{\underline{I(t) = \frac{U}{R} - \frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}}
$$

3.2 Gesucht ist der Wert für t, bei dem $I = 3$ erreicht ist. Dabei werden in die Lösung der letzten Teilaufgabe die gegebenen Werte für U, R und L eingesetzt:

$$
\begin{aligned}
 & & I(t) &= 3 & & \\
\Longleftrightarrow & & \frac{230}{46}\left(1-e^{-\frac{46}{100}t}\right) &= 3 & & \\
\Longleftrightarrow & & 5-5e^{-0{,}46t} &= 3 & & \mid -5 \\
\Longleftrightarrow & & -5e^{-0{,}46t} &= -2 & & \mid :(-5) \\
\Longleftrightarrow & & e^{-0{,}46t} &= \frac{2}{5} & & \mid \ln(\ ) \\
\Longleftrightarrow & & -0{,}46t &= \ln\left(\frac{2}{5}\right) & & \mid :(-0{,}46) \\
\Longleftrightarrow & & t &= -\frac{1}{0{,}46}\ln\left(\frac{2}{5}\right) & & \\
\Longleftrightarrow & & & \underline{\underline{t \approx 2{,}0}} & &
\end{aligned}
$$

1.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2}{x-4}\right)$ mit $D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Geben Sie Definitionsmenge und die Nullstelle der Funktion an. Untersuchen Sie weiterhin das Verhalten der Funktionswerte an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie daraufhin die Gleichung aller Asymptoten an. **5 BE**

1.2 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_f und bestimmen Sie Art und exakte Koordinaten aller Extrempunkte.
$\left[\text{Mögliches Zwischenergebnis: } f'(x) = \frac{x^2-8x}{x^4+(x-4)^2}\right]$ **9 BE**

1.3 Schließen Sie anhand der Ergebnisse der letzten Teilaufgaben auf die Wertemenge der Funktion $f(x)$. **2 BE**

1.4 Stellen Sie den Graphen G_f gemeinsam mit den Asymptoten im Intervall $-2 \leq x \leq 10$ graphisch dar. Maßstab x-Achse: $1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{LE}$; Maßstab y-Achse: $4\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{LE}$ **4 BE**

1.5 Betrachtet wird zusätzlich die Funktion $g(x) = f(x)$ mit $D_g = [1;\, 3]$. Begründen Sie, dass die Funktion $g(x)$ umkehrbar ist. Weisen Sie zudem nach, dass der Graph der Umkehrfunktion durch den Punkt $(-\arctan(2)\,|\,2)$ verläuft und bestimmen Sie dessen Steigung in diesem Punkt. **5 BE**

1.6.0 Der Graph der Funktion $f(x)$ kann durch die Parabel mit der Gleichung $p(x) = ax^2 + bx + c$ angenähert werden. Diese soll dabei ihren absoluten Hochpunkt bei $(0\,|\,0)$ haben und an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ mit dem Funktionswert von $f(x)$ an dieser Stelle übereinstimmen.

Bestimmen Sie zunächst die Werte der Parameter a,b und c. Bestimmen Sie dann die Maßzahl des Volumens des Körpers, der entsteht, wenn die Parabel im Intervall $[0;\, 1]$ um die x-Achse rotiert. Geben Sie Zwischen- und Endergebnisse auf drei Nachkommastellen gerundet an.

1.6.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a, b und c. Runden Sie bei Bedarf auf drei Nachkommastellen.
[Zwischenergebnis: $p(x) = 0{,}285x^2$] **3 BE**

1.6.2 Bestimmen Sie die Maßzahl des Volumens des Körpers, der entsteht, wenn die Parabel im Intervall $[0;\, 1]$ um die x-Achse rotiert. Geben Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen gerundet an. **3 BE**

2.0 Untersucht wird der Holzbestand eines Waldes. Die Funktion $h(t)$ soll den zeitlichen Verlauf des Holzbestandes in Tausend Raummetern angeben, dabei ist der Raummeter eine typische Einheit im Umgang mit Holz. Durch die natürlich auftretende Vervielfältigung der Bäume ist die Zunahme des Holzbestandes normalerweise proportional zum aktuellen Holzbestand.

Da der zu betrachtende Wald allerdings von Schädlingen befallen ist, muss zusätzlich ein Korrekturterm berücksichtigt werden, welcher im Modell als quadratische Abnahme berücksichtigt wird. Insgesamt ist der zeitliche Verlauf des Holzbestandes damit gegeben durch die Differentialgleichung $\dot{h}(t) = 2 \cdot h(t) - 4 \cdot h^2(t)$ mit $t \geq 0$.

2.1 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung mithilfe der Methode der Trennung der Variablen.

$\left[\text{Mögliches Ergebnis: } h(t) = \dfrac{e^{2t} \cdot D}{1 + 2e^{2t} \cdot D}\right]$ **8 BE**

2.2 Der Bestand zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt genau eintausend Raummeter, sodass $h(0) = 1$ gilt. Bestimmen Sie für diesen Fall die spezielle Lösung und betrachten Sie das Verhalten des Holzbestandes auf lange Sicht. **4 BE**

1.0 Betrachtet wird die Funktion f mit $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2}{x-4}\right)$.

1.1 **Definitionsmenge**

Da die Arcustangens-Funktion an sich keine Einschränkungen des Definitionsbereichs aufweißt, können Einschränkungen nur durch das Argument auftreten. Da niemals durch null geteilt werden darf, darf auch der Nennerterm des Arguments niemals null werden:

$$x - 4 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq 4$$

Die Definitionsmenge ergibt sich also zu $D_f = \mathbb{R}\backslash\{4\}$.

Nullstelle

Wegen $\arctan(0) = 0$ stimmt die Nullstelle des Arguments mit dem der Funktion $f(x)$ überein. Das Argument wird null, wenn der Zählerterm null wird. Dafür gilt:

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1;2} = 0$$

Die Nullstelle der Funktion $f(x)$ liegt also bei $\underline{\underline{x = 0}}$.

Verhalten an den Rändern der Definitionsmenge

$$x \to -\infty\colon f(x) = \arctan\underbrace{\left(\frac{\overbrace{x^2}^{\to\infty}}{\underbrace{x-4}_{\to-\infty}}\right)}_{\to-\infty,\text{ da ZG>NG}} \to -\frac{\pi}{2}$$

$$x \to \infty\colon f(x) = \arctan\underbrace{\left(\frac{\overbrace{x^2}^{\to\infty}}{\underbrace{x-4}_{\to\infty}}\right)}_{\to\infty,\text{ da ZG>NG}} \to \frac{\pi}{2}$$

$$x \to 4^-\colon f(x) = \arctan\underbrace{\left(\frac{\overbrace{x^2}^{\to16}}{\underbrace{x-4}_{\to0^-}}\right)}_{\to-\infty} \to -\frac{\pi}{2}$$

$$x \to 4^+\colon f(x) = \arctan\underbrace{\left(\frac{\overbrace{x^2}^{\to16}}{\underbrace{x-4}_{\to0^+}}\right)}_{\to\infty} \to \frac{\pi}{2}$$

Gleichung aller Asymptoten

Aus dem Verhalten der Funktionswerte für $x \to 4^{\pm}$ folgt, dass es sich nicht um eine Polstelle handelt und so keine senkrechte Asymptote vorliegt. Aus dem Verhalten der Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ ergeben sich zwei waagrechte Asymptoten mit den Gleichungen $\underline{\underline{y = -\frac{\pi}{2}}}$ und $\underline{\underline{y = \frac{\pi}{2}}}$.

1.2 **Ermitteln der ersten Ableitung**

Mithilfe der Ketten- und Quotientenregel wird die erste Ableitung der Funktion bestimmt.

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2}{x-4}\right)$$

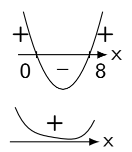
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{x-4}\right)^2}\cdot\left(\frac{x^2}{x-4}\right)'\right] && \text{(Ansatz Kettenregel)}\\
&= \left[\frac{1}{1+\frac{x^4}{(x-4)^2}}\cdot\frac{(x^2)'\cdot(x-4)-x^2\cdot(x-4)'}{(x-4)^2}\right] && \text{(Ansatz Quotientenregel)}\\
&= \frac{1}{1+\frac{x^4}{(x-4)^2}}\cdot\frac{2x\cdot(x-4)-x^2\cdot 1}{(x-4)^2} && \text{(Anwendung)}\\
&= \frac{1}{\frac{(x-4)^2}{(x-4)^2}+\frac{x^4}{(x-4)^2}}\cdot\frac{2x^2-8x-x^2}{(x-4)^2} && \text{(Hauptnenner bilden)}\\
&= \frac{1}{\frac{(x-4)^2+x^4}{(x-4)^2}}\cdot\frac{x^2-8x}{(x-4)^2} && \text{(Doppebruch auflösen)}\\
&= \frac{\cancel{(x-4)^2}}{(x-4)^2+x^4}\cdot\frac{x^2-8x}{\cancel{(x-4)^2}} && \text{(Kürzen)}\\
&= \frac{x^2-8x}{(x-4)^2+x^4} \quad \text{mit } D_{f'} = D_f && \text{(Zur Kontrolle angegeben)}
\end{aligned}$$

Monotonieverhalten und Art und Koordinaten der Extrempunkte

Zunächst werden die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt, die den Nullstellen des Zählerterms entsprechen.

$$\begin{aligned}
& & f'(x) &= 0\\
&\Rightarrow & x^2-8x &= 0\\
&\Longleftrightarrow & x(x-8) &= 0\\
&\Rightarrow & x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 &= 8
\end{aligned}$$

Über das Monotonieverhalten wird mit einer Vorzeichentabelle entschieden.

x	$x<0$	$x=0$	$0<x<4$	$x=4$	$4<x<8$	$x=8$	$8<x$	Skizzen
$f'(x)$-Zähler: x^2-8x	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$-Nenner: $x^4+(x-4)^2$	$+$	$+$	$+$		$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.def.	$-$	0	$+$	
G_f	$\nearrow$	HOP	$\searrow$	n.def.	$\searrow$	TIP	$\nearrow$	

Der Graph der Funktion $f(x)$ ist demnach streng monoton fallend in den Intervallen $[0; 4[$ und $]4; 8]$ und streng monoton wachsend in den Intervallen $]-\infty; 0]$ und $[8; \infty[$. Durch Einsetzen werden die Funktionswerte der Extremstellen bestimmt:

$$f(0) = \arctan\left(\frac{0^2}{0-4}\right) = \arctan(0) = 0 \qquad f(8) = \arctan\left(\frac{8^2}{8-4}\right) = \arctan(16)$$

Die Koordinaten der relativen Extrempunkte lauten $\underline{\underline{HOP\,(0\,|\,0)}}$ und $\underline{\underline{TIP\,(8\,|\,\arctan(16))}}$.

1.3 Die Wertemenge ergibt sich aus dem Grenzwertverhalten der Funktion und dem Monotonieverhalten. Es zeigt sich, dass die Funktionswerte jeweils gegen $\pm\frac{\pi}{2}$ streben, diesen Wert aber nicht erreichen. Da diese Werte, wie das Monotonieverhalten zeigt, auch nie überschritten werden, ergibt sich die Wertemenge der Funktion zu $\underline{\underline{W_f = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[}}$.

1.4 Die Zeichnung soll folgende Elemente enthalten:

- Graph G_f mit $f(x) = \arctan\left(\frac{x^2}{x-4}\right)$
- Asymptoten: $y = -\frac{\pi}{2}$ und $y = \frac{\pi}{2}$

Für die graphische Darstellung wird eine Wertetabelle als Hilfestellung erstellt:

x	-2	0	2	3	5	6	8	10
$f(x)$	$-0{,}58$	0	$-1{,}11$	$-1{,}46$	$1{,}53$	$1{,}52$	$1{,}51$	$1{,}51$

Mithilfe dieser Werte kann nun die grafische Darstellung erfolgen (siehe nächste Seite).

1.5 **Begründung der Umkehrbarkeit**

Die Funktion $g(x)$ ist umkehrbar, da $f(x)$ im Intervall $D_g = [1; 3]$ stetig verläuft und streng monoton fallend ist.

Nachweis der Verlaufes durch den gegebenen Punkt und Steigung

Es gilt:

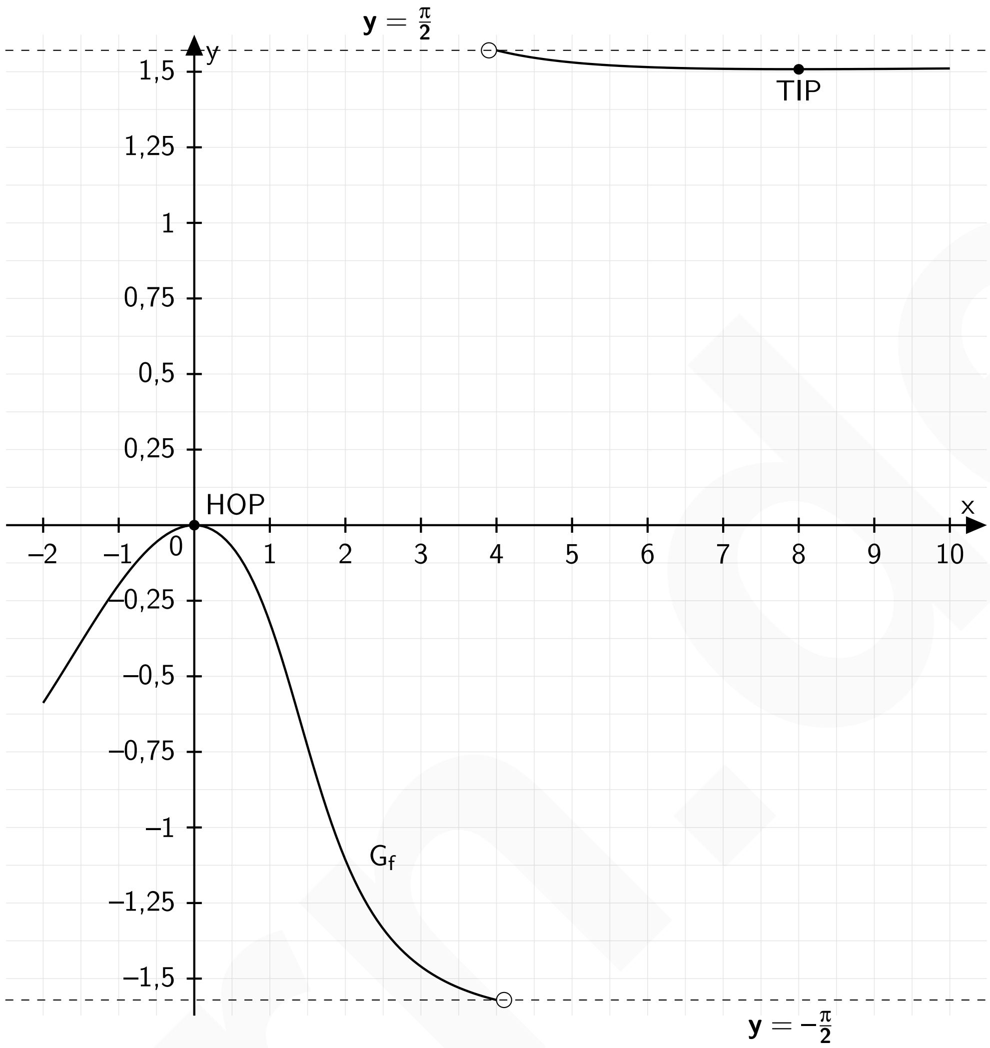
$$g(2) = f(2) = \arctan\left(\frac{2^2}{4-2}\right) = \arctan(2)$$

Da der Graph von g durch den Punkt $(2\,|\,\arctan(2))$ verläuft, muss der Graph der Umkehrfunktion durch den Punkt $(\arctan(2)\,|\,2)$ verlaufen.

Für die Berechnung der Steigung an dieser Stelle kann die Ableitung der ursprünglichen Funktion berechnet werden:

$$(g^{-1})'(\arctan(2)) = \frac{1}{g'(2)} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{2^2-8\cdot 2}{2^4+(2-4)^2}} = \frac{1}{\frac{-12}{20}} = \underline{\underline{-\frac{5}{3}}}$$

Zeichnung zu Teilaufgabe 1.4:



1.6.1 **Werte der Parameter**

Die Parabel soll durch den Punkt $(0\,|\,0)$ verlaufen. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} & p(0) = 0 \\ \iff \quad & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \\ \iff \quad & \underline{\underline{c = 0}} \end{aligned}$$

Außerdem soll an dieser Stelle das Maximum der Funktion liegen, weshalb an dieser Stelle auch die erste Ableitung der Funktion gleich null sein muss.

$$\begin{aligned} & p'(0) = 0 \\ \iff \quad & 2 \cdot a \cdot 0 + b = 0 \\ \iff \quad & \underline{\underline{b = 0}} \end{aligned}$$

Außerdem ist gegeben, dass die Funktionswerte von $p(x)$ und $f(x)$ an der Stelle $x = 0{,}5$ übereinstimmen sollen:

$$
\begin{aligned}
& & p(0{,}5) &= f(0{,}5) & \\
&\Longleftrightarrow & a \cdot 0{,}5^2 &= \arctan\left(\frac{0{,}5^2}{0{,}5-4}\right) & \\
&\Longleftrightarrow & 0{,}25a &= \arctan\left(\frac{0{,}25}{3{,}5}\right) & \quad | \cdot 4 \\
&\Longleftrightarrow & a &= 4 \cdot \arctan\left(\frac{0{,}25}{3{,}5}\right) & \\
&\Longleftrightarrow & \underline{\underline{a}} &\underline{\underline{\approx 0{,}285}} &
\end{aligned}
$$

1.6.2 **Maßzahl des Rotationsvolumens**

Es kann nun die Maßzahl des Volumens ermittelt werden, welches durch Rotation von $p(x) = 0{,}285x^2$ um die x-Achse im Intervall $[0;\ 1]$ entsteht.

$$
V = \pi \int_0^1 (p(x))^2 dx = \pi \int_0^1 (0{,}285x^2)^2 dx = \pi \cdot 0{,}285^2 \int_0^1 x^4 dx = \pi \cdot 0{,}285 \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^1
$$

$$
= \pi \cdot 0{,}285^2 \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot 1^5 - 0\right) \approx \underline{\underline{0{,}051}}\,[\text{VE}]
$$

2.1 Zunächst werden die Variablen der gegebenen Differentiagleichung separiert.

$$
\begin{aligned}
& & \dot{h} &= 2h - 4h^2 & \\
&\Longleftrightarrow & \frac{dh}{dt} &= 2h - 4h^2 & \quad | \cdot dt \\
&\Longleftrightarrow & dh &= (2h - 4h^2)dt & \quad | : (2h - 4h^2) \\
&\Longleftrightarrow & \frac{dh}{2h - 4h^2} &= dt & \quad | \cdot 2 \\
&\Longleftrightarrow & \frac{dh}{h - 2h^2} &= 2dt & \\
&\Longleftrightarrow & \frac{dh}{h(1-2h)} &= 2dt & \\
&\Longleftrightarrow & \int \frac{1}{1-2h} dh &= \int 2dt &
\end{aligned}
$$

Um das Integral auf der rechten Seite der Gleichung lösen zu können wird zunächst eine Partialbruchzerlegung durchgeführt. Dabei wird der Nenner unter Einführung zweier noch zu bestimmender Werte A und B in zwei Teile aufgeteilt, dann wieder der Hauptnenner gebildet und durch Einsetzen verschiedener Werte für h der Wert von A und B bestimmt:

$$
\frac{1}{h(1-2h)} = \frac{A}{h} + \frac{B}{1-2h} = \frac{A(1-2h)}{h(1-2h)} + \frac{B \cdot h}{h(1-2h)} = \frac{A(1-2h) + Bh}{h(1-2h)}
$$

Der Nennerterm des ersten und letzten Terms stimmen nun überein. Setzt man verschiedene Werte für h ein, müssen dabei auch die Zähler übereinstimmen und es ergeben sich die Werte von A und B:

$$\begin{aligned}
&\text{Einsetzen von } h=0: \quad 1 = A(1-2\cdot 0) + B\cdot 0 = A \quad \Rightarrow \quad A=1\\
&\text{Einsetzen von } h=\frac{1}{2}: \quad 1 = A\left(1-2\cdot\frac{1}{2}\right) + B\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}B \quad \Rightarrow \quad B=2
\end{aligned}$$

Damit kann obige Gleichungen mit den Integralen weiter umgeformt und aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}
& & \int \frac{1}{1-2h}dh &= \int 2dt \\
&\Longleftrightarrow & \int \left(\frac{1}{h} + \frac{2}{1-2h}\right) dh &= \int 2dt \\
&\Longleftrightarrow & \ln(|h|) - \ln(|1-2h|) &= 2t + C \\
&\Longleftrightarrow & \ln\left(\left|\frac{h}{1-2h}\right|\right) &= 2t + C & &|\exp(\,) \\
&\Longleftrightarrow & \left|\frac{h}{1-2h}\right| &= e^{2t+C} \\
&\Longleftrightarrow & \left|\frac{h}{1-2h}\right| &= e^{2t}\cdot e^{C} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{h}{1-2h} &= e^{2t}\cdot D
\end{aligned}$$

Dabei wurden zur Umformung Logarithmengesetze angewendet. Es ist $C,D \in \mathbb{R}$. Die Betragsstriche entfallen, da das Vorzeichen von D beliebig gewählt werden kann und die Exponentialfunktion stets größer als null ist.

$$\begin{aligned}
& & \frac{h}{1-2h} &= e^{2t}\cdot D & &|\cdot(1-2h) \\
&\Longleftrightarrow & h &= e^{2t}\cdot D - 2he^{2t}\cdot D & &|+2he^{2t}\cdot D \\
&\Longleftrightarrow & h + 2he^{2t}\cdot D &= e^{2t}\cdot D \\
&\Longleftrightarrow & h(1+2e^{2t}\cdot D) &= e^{2t}\cdot D & &|:(1+2e^{2t}\cdot D) \\
&\Longleftrightarrow & \underline{\underline{h(t) = \frac{e^{2t}\cdot D}{1+2e^{2t}\cdot D}}}
\end{aligned}$$

2.2 Spezielle Lösung

Es ist die spezielle Lösung für $h(0)=1$ gesucht.

$$\begin{aligned}
& & h(0) &= 1 \\
&\Longleftrightarrow & \frac{e^{2\cdot 0}\cdot D}{1+2e^{2\cdot 0}\cdot D} &= 1 \\
&\Longleftrightarrow & \frac{D}{1+2D} &= 1 & &|\cdot(1+2D)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \qquad D &= 1 + 2D \qquad && |-2D \\
\Longleftrightarrow \qquad -D &= 1 && |\cdot(-1) \\
\Longleftrightarrow \qquad D &= -1
\end{aligned}
$$

Die spezielle Lösung ergibt sich damit zu $\underline{\underline{h(t) = \frac{-e^{2t}}{1-2e^{2t}} = \frac{e^{2t}}{2e^{2t}-1}}}$.

Holzbestand auf lange Sicht
Um den Bestand auf lange Sicht zu betrachten, wird das Verhalten der Funktionswerte für $t \to \infty$ analysiert.

Möglichkeit 1: Ausklammern

$$t \to \infty: h(t) = \frac{e^{2t}}{2e^{2t}-1} = \frac{\cancel{e^{2t}}}{\cancel{e^{2t}}(2 - \underbrace{\frac{1}{e^{2t}}}_{\to 0})} \to \frac{1}{2}$$

Möglichkeit 2: Zähler- und Nennergrad

$$t \to \infty: h(t) = \frac{\mathbf{1}e^{2t}}{\mathbf{2}e^{2t}-1} \to \frac{1}{2}$$

In diesem Fall ist Zählergrad gleich Nennergrad, sodass die fett markierten Leitkoeffizienten den Grenzwert ergeben.
Der Holzbestand nähert sich auf lange Sicht dem Wert von 500 Raummetern, also auf den halben anfänglichen Bestand.

1.0 An einem Strand verkauft der Anbieter „BoardsFürDich“ Surfbretter. Um die Lagerbestände für die nächste Saison zu planen analysiert der Inhaber des Geschäfts die letzten 1000 Verkäufe. Grundsätzlich können Kunden zwischen drei Farben, schwarz (S), gelb (G) und rot (R) und den drei Modellvarianten „Ambition“ (A), „BeAlive“ (B) und „Calm“ (C) wählen. Modell und Farbe können unabhängig voneinander gewählt werden.
Das Modell „BeAlive“ scheint dabei sehr beliebt zu sein und machte 60 % der Käufe aus, während die anderen beiden Modell gleich häufig verkauft wurden. Unter den analysierten Verkäufen befanden sich 150 rote Surfbretter und doppelt so viele gelbe, der Rest waren schwarze Surfbretter. Die relativen Häufigkeiten der Analyse werden als Wahrscheinlichkeiten für zukünftige Käufe interpretiert. Der Kauf eines Surfbrettes wird als Zufallsexperiment aufgefasst.

1.1 Erstellen Sie ein vollständig beschriftetes Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse des betrachteten Zufallsexperiments. **4 BE**

1.2 Gegeben sind folgende Ereignisse:

E_1 : „Das gekaufte Surfbrett ist nicht rot und nicht das Modell „Calm“.“
$E_2 = \{SB; SC; GB; GC; RB; RC\}$

Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und fassen Sie E_2 in möglichst einfachen Worten zusammen. Prüfen Sie E_1 und E_2 außerdem auf stochastische Abhängigkeit. **6 BE**

2.0 Zusätzlich zum Verkauf bietet der Shop „BoardsFürDich“ auch noch Dienstleistungen rund ums Surfbrett an. Obwohl diese Dienstleistungen grundsätzlich jedem angeboten werden, wird für jene Kunden, die ihr Surfbrett auch bei „BoardsFürDich“ gekauft haben, ein günstigerer Preis angeboten, wie auch folgender Preistafel zu entnehmen ist.

Reinigung	10 €
Wachsen	20 €
komplette Inspektion	30 €
Einlagerung im Winter	110 €
Für Kunden, die ihr Surfbrett in unserem Laden gekauft haben geben wir auf alle angegeben Preise einen Rabatt von 15 %.	

Außerdem sind dem Inhaber des Geschäfts die folgenden Nutzungsstatistiken bekannt, die angeben, mit welcher prozentualen Häufigkeit welche Kundengruppe jeweils welche Dienstleistung gebucht hat:

Verteilung Kunden mit Surfbrett aus eigenem Laden: Reinigung (45 %), Wachsen (25 %), Inspektion (15 %), Einlagerung (15 %)

Verteilung Kunden mit fremdem Surfbrett: Reinigung (20 %), Wachsen (35 %), Inspektion (10 %), Einlagerung (35 %)

2.1 Betrachtet wird das Ereignis:

E_3: „Von 50 Kunden mit Surfbrett von „BoardsFürDich“ buchen mindestens acht die komplette Inspektion.“

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_3. **2 BE**

2.2 Insgesamt sind 80 % der Kunden solche, die ihr Surfbrett von „BoardsFürDich“ gekauft haben. Berechnen Sie unter der Annahme dieser Quote die zu erwartenden Einnahmen der nächsten 200 geleisteten Dienstleistungen. **3 BE**

3 Da das Geschäft ausgezeichnet läuft, kann der Laden noch eine Zweitstelle eröffnen. Von den letzten 500 gebuchten Dienstleistungen wurden 220 am Standort 1 gebucht. Ein Teil der gesamten 500 Dienstleistungen ist in folgender Tabelle gelistet:

	Standort 1	Standort 2
Reinigung	98	20
Inspektion	70	65

Alle anderen Dienstleistungen sind nicht separat gelistet. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Dienstleistung am Standort 1 gebucht wird und weder Reinigung noch Inspektion ist. **3 BE**

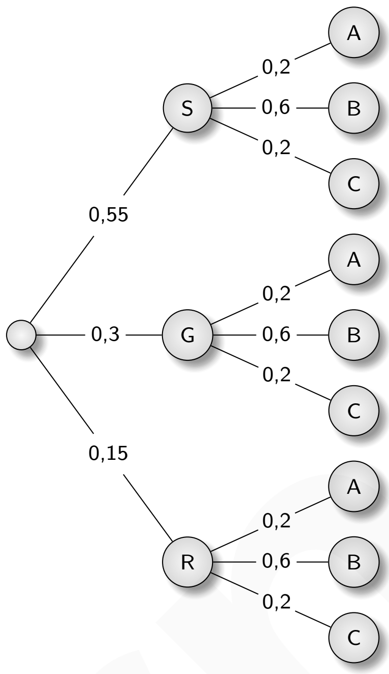
4 Während der Pflege treten immer wieder Probleme mit dem verwendeten Wachs auf, da dieses Verfärbungen aufweißt. Nach Rücksprache mit dem Hersteller behauptet dieser, dass maximal 10 % der Dosen Verfärbungen aufweißen. Dem Inhaber von „BoardsFürDich“ erscheint dieser Anteil zu niedrig, weshalb er die 200 Dosen im Lager auf Verfärbungen überprüft.

Geben Sie für diesen Test die Testgröße und die Art des Tests and und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf einem Signifikanzniveau von 5 %. **5 BE**

1.1 Aus den Angaben ergibt sich direkt, dass $P(B) = 0{,}6$, sodass für die anderen beiden Modelle eine Wahrscheinlichkeit von $1 - 0{,}6 = 0{,}4$ verbleibt. Da diese gleich häufig verkauft wurden ist also $P(A) = P(C) = 0{,}2$. Aus dem gegebenen Text ergeben sich weiterhin die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(R) = \frac{150}{1000} = 0{,}15 \qquad P(G) = \frac{150 \cdot 2}{1000} = 0{,}3 \quad \Rightarrow \quad P(S) = 1 - 0{,}15 - 0{,}3 = 0{,}55$$

Damit ergibt sich das vollständige Baumdiagramm mit den Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse:



$P(\{SA\}) = 0{,}55 \cdot 0{,}2 = 0{,}11$

$P(\{SB\}) = 0{,}55 \cdot 0{,}6 = 0{,}33$

$P(\{SC\}) = 0{,}55 \cdot 0{,}2 = 0{,}11$

$P(\{GA\}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$

$P(\{GB\}) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$

$P(\{GC\}) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$

$P(\{RA\}) = 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}03$

$P(\{RB\}) = 0{,}15 \cdot 0{,}6 = 0{,}09$

$P(\{RC\}) = 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}03$

1.2 Für E_1 entfallen alle Elementarereignisse, die R oder C enthalten, sodass gilt:

$$E_1 = \{SA; SB; GA; GB\}$$

In der Menge von E_2 kommen keine Elementarereignisse vor, die A enthalten. Eine Formulierung in Worten ist also:

E_2: „Beim Kauf handelt es sich nicht um das Modell „Ambition““

Mithilfe der berechneten Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse und den aufzählenden Mengenschreibweisen der Ereignisse E_1 und E_2, können jeweils folgende Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden, die zu Prüfung der stochastischen Abhängigkeit benötig werden:

$$P(E_1) = 0{,}11 + 0{,}33 + 0{,}06 + 0{,}18 = 0{,}68$$
$$P(E_2) = 0{,}33 + 0{,}11 + 0{,}18 + 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}03 = 0{,}8$$
$$P(E_1 \cap E_2) = P(\{SB; GB\}) = 0{,}33 + 0{,}18 = 0{,}51$$

Zwei Ereignisse sind stochastisch unabhängig voneinander, wenn gilt: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$:

$$P(E_1) \cdot P(E_2) = 0{,}544 \neq 0{,}51 = P(E_1 \cap E_2)$$

Da $P(E_1) \cdot P(E_2) \neq P(E_1 \cap E_2)$, sind die Ereignisse stochastisch abhängig.

2.1 Von den Kunden mit Surfbrett von „BoardsFürDich" wird die komplette Inspektion mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}15$ gebucht. Betrachtet man also als Zufallsgröße X die Anzahl der gebuchten kompletten Inspektionen unter den nächsten $n = 50$ Kunden mit Surfbrett von „BoardsFürDich", so ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens acht Mal die komplette Inspektion gebucht wird:

$$\begin{aligned} P(E_3) &= P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{7} B(50; 0{,}15; i) = 1 - F_{0{,}15}^{50}(7) \\ &\approx 1 - 0{,}51875 = \underline{\underline{0{,}48125}} \end{aligned}$$

2.2 Es werden nun die folgenden Zufallsgrößen betrachtet:

X_1 : Einnahmen in Euro pro Kunde mit Surfbrett von „BoardsFürDich"
X_2 : Einnahmen in Euro pro Kunde mit anderem Surfbrett

Aus den Preisen der einzelnen Dienstleistungen, dem Rabatt für die Kunden mit Surfbrett von „BoardsFürDich" und der jeweiligen Wahrscheinlichkeitsverteilung je nach Typ der Dienstleistung, kann ein Erwartungswert für jeder der beiden Größen ermittelt werden:

$$E(X_1) = 0{,}45 \cdot (0{,}85 \cdot 10) + 0{,}25 \cdot (0{,}85 \cdot 20) + 0{,}15 \cdot (0{,}85 \cdot 30) + 0{,}15 \cdot (0{,}85 \cdot 110) = 25{,}925$$
$$E(X_2) = 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}35 \cdot 20 + 0{,}1 \cdot 30 + 0{,}35 \cdot 110 = 50{,}5$$

Zudem ist gegeben, dass unter den nächsten 200 Kunden 80 % der Kunden solche sind, die ihr Surfbrett von „BoardsFürDicht" gekauft haben, was insgesamt $0{,}8 \cdot 200 = 160$ Kunden entspricht. Entsprechend verbleiben $200 - 160 = 40$ Kunden, die ihr Surfbrett woanders gekauft haben. Damit ergeben sich die gesamten zu erwartenden Einnahmen E:

$$E = 160 \cdot E(X_1) + 40 \cdot E(X_2) = \underline{\underline{6168}}\,[€]$$

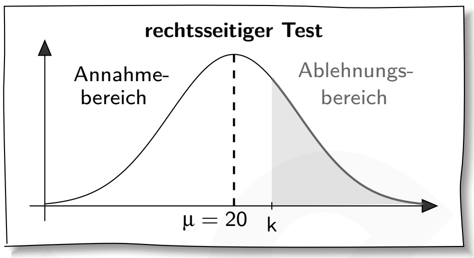
Die Einnahmen der nächsten 200 Kunden liegen bei $\underline{\underline{6168}}$ €.

3 Von den insgesamt 500 Dienstleistungen werden insgesamt 220 am Standort 1 gebucht. Davon sind insgesamt $220 - 98 - 70 = 52$ weder Reinigung noch Inspektion. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Dienstleistung am Standort 1 gebucht wird, aber weder Reinigung noch Dienstleistung ist beträgt also $\frac{52}{500} = \underline{\underline{0{,}104}} = 10{,}4\,\%$.

4 Testgröße T: „Anzahl der Dosen mit Verfärbung, unter 200 untersuchten.“

Die Nullhypothese ist, dass der Anteil der Dosen mit Verfärbung bei 10 % liegt. Der Erwartungswert ($\mu = n \cdot p$) liegt also bei $\mu = 200 \cdot 0{,}10 = 20$ solcher Dosen.

Nullhypothese	Gegenhypothese
$H_0 : p \leq 0{,}10$	$H_1 : p > 0{,}10$
Annahmebereich von H_0:	Ablehnungsbereich von H_0:
$A = \{0; 1; ...; k-1\}$	$\overline{A} = \{k; k+1; ...; 200\}$



Anmerkung: k liegt immer im Ablehnungsbereich. Es handelt sich um einen rechtsseitigen Hypothesentest, da man vermutet, dass mehr als 10 % der Dosen eine Verfärbung aufweisen und somit k rechts vom Erwartungswert liegt (siehe Skizze).

Mit dem gegebenen Signifikanzniveau von 5 % gilt dann:

$$\begin{aligned}
& & P(T \geq k) &\leq 0{,}05 & \\
&\Longleftrightarrow & 1 - P(T \leq k-1) &\leq 0{,}05 & \quad \mid -1 \\
&\Longleftrightarrow & -P(T \leq k-1) &\leq -0{,}95 & \quad \mid \cdot (-1) \\
&\Longleftrightarrow & P(T \leq k-1) &\geq 0{,}95 & \\
&\Longleftrightarrow & F_{0,10}^{200}(k-1) &\geq 0{,}95 &
\end{aligned}$$

Der gesuchte Wert $k-1$ kann dabei einem Tafelwerk in der rechten Spalte entnommen werden. Somit ist $k-1 = 27$, da hier der Prozentwert der Summe das erste Mal **größer** als 0,95 ist. Den größtmöglichen Ablehnungsbereich erhält man somit für $k = 28$. Er lautet $\underline{\underline{\overline{A} = \{28; 29; ...; 200\}}}$

(Annahmebereich $A = \{0,1,...27\}$).

1.0 Mit dem Vulkanexplosivitätsindex, oder kurz dem VEI, kann die Stärke von Vulkanausbrüchen eingestuft werden, welche von 0 bis 8 reicht, wobei höhere Zahlen für schwerere Ausbrüche stehen. Da die Schwere generell sehr schwer messbar ist, wählt man zur Klassifizierung der Schwere das beim Ausbruch ausgestoßene Material und die Höhe der Eruptionssäule als Kriterien. Aufzeichnungen über die Häufigkeit werden dabei nur in den Kategorien 2 bis 8 geführt. Die Zufallsgröße X soll nun den Wert der VEI angeben und ergibt sich entsprechend folgender Verteilung der relativen Häufigkeiten (da nur die Ereignisse mit VEI von 2 bis 8 kategorisiert werden, ist die Summe der relativen Häufigkeiten in der folgenden Tabelle 1):

x	2	3	4	5	6	7	8
$P(X = x)$	$4a - 0{,}09$	a	$0{,}06$	$0{,}1a$	$9b$	b	0

Relative Häufigkeiten werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.1 Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b, wenn die durchschnittliche Stärke der Ausbrüche bei 2,421 liegt. Ermitteln Sie außerdem gerundet auf ganze Zahlen, wieviele Ausbrüche insgesamt registriert wurden, wenn 3631 Ereignisse der Kategorie 2 registriert wurden.

[Ergebnis: $a = 0{,}2$; $b = 0{,}001$] **5 BE**

1.2 Geben Sie basierend auf der gegebenen Verteilung die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse an:

E_1: „Ein zufällig ausgewählter historischer Vulkanausbruch hatte einen VEI von 5 oder höher.“

E_2: „Von 20 zufällig ausgewählten historischen Vulkanausbrüchen hatten genau 3 einen VEI von 5.“

E_3: „Von 50 zufällig ausgewählten historischen Vulkanausbrüchen hatten weniger als 16 % einen VEI von 3.“

6 BE

2 Aufgrund der Faszination, die Vulkane bei vielen Menschen auslöst, wird auch Tourismus bei Vulkanen zunehmend populärer. Ein Reiseportal im Internet hat zwei verschiedene Reisen im Sortiment, nämlich die nach Island (I), wo es 31 aktive Vulkane gibt, und die nach Japan (J), wo es sogar 110 aktive Vulkane gibt.

Der Anbieter führt unter den letzten 600 Kunden eine Umfrage bezüglich der Zufriedenheit durch. Insgesamt waren 30 Kunden nicht zufrieden ($\overline{Z}$). 60 % aller Kunden haben sich für die Reise nach Japan entschieden. Insgesamt waren 228 Kunden in Island und zufrieden (Z) mit ihrer Reise.

Auf dem Reiseportal wird daraufhin damit geworben, dass Personen, die sich für eine Island-Reise entscheiden, zufrieden sein werden als diejenigen, die sich für die Japan-Reise entscheiden. Untersuchen Sie, ob diese Auskunft korrekt ist und begründen Sie Rechnungen und Ihre Vorgehensweise. **5 BE**

3.0 Der Verbraucherschutz überprüft das Reiseportal und denkt, dass die Zahlen der Umfrage des Reiseanbieters nicht stimmen. Es wird vermutet, dass die Zahl von 95 % zufriedener Kunden zu hoch ist und bewusst zu hoch angegeben wurde um Kunden zu locken. Daraufhin kontaktiert der Verbraucherschutz zufällige 100 der befragten Kunden und befragt diese erneut zu ihrer Zufriedenheit bezüglich der Reise.

3.1 Geben Sie einen geeigneten Hypothesentest auf einem 5 %-Signifikanzniveau an und ermitteln Sie, zu welcher Entscheidung der Verbraucherschutz auf Grundlage des Tests kommen sollte, wenn 8 der Befragten nicht mit der Reise zufrieden waren. **5 BE**

3.2 Wie hoch ist im vorliegenden Fall die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn tatsächlich 90 % der Befragten unzufrieden mit der Reise waren? **2 BE**

1.1 **Werte der Parameter a und b**

Für die Verteilung ergeben sich zwei Bedingungen, da die Gesamtwahrscheinlichkeit bei 1 liegen muss (I) und der durchschnittliche VEI-Wert bei 2,421 (II):

$$
\begin{array}{rrl}
\text{(I)} & (4a-0{,}09)+a+0{,}06+0{,}1a+9b+b=1 & \\
\Longleftrightarrow & -0{,}03+5{,}1a+10b=1 & \mid -(-0{,}03+5{,}1a) \\
\Longleftrightarrow & 10b=1{,}03-5{,}1a & \mid :10 \\
\Longleftrightarrow & b=0{,}103-0{,}51a &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrl}
\text{(II)} & 2\cdot(4a-0{,}09)+3\cdot a+4\cdot 0{,}06+ & \\
 & 5\cdot 0{,}1a+6\cdot 9b+7\cdot b=2{,}421 & \\
\Longleftrightarrow & 0{,}06+11{,}5a+61b=2{,}421 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrl}
\text{b in (II)} & 0{,}06+11{,}5a+61\cdot(0{,}103-0{,}51a)=2{,}421 & \\
\Longleftrightarrow & 6{,}343-19{,}61a=2{,}421 & \mid -6{,}343 \\
\Longleftrightarrow & -19{,}61a=-3{,}922 & \mid :(-19{,}61) \\
\Longleftrightarrow & \underline{\underline{a=0{,}2}} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
\text{a in b} & b=0{,}103-0{,}51\cdot 0{,}2 \\
\Longleftrightarrow & \underline{\underline{b=0{,}001}}
\end{array}
$$

Anzahl der registrierten Ausbrüche

Da 3631 Ereignisse der Kategorie 2 registriert wurden und dies laut Verteilung einem Anteil von 0,71 entspricht, gilt für die Gesamtzahl n der insgesamt registrierten Ereignisse:

$$
\begin{array}{rrl}
 & \text{Prozentsatz}=\dfrac{\text{Prozentwert}}{\text{Gesamtzahl n}} & \\
 & 0{,}71=\dfrac{3631}{n} & \mid \cdot n \\
\Longleftrightarrow & 0{,}71\cdot n=3631 & \mid :0{,}71 \\
\Longleftrightarrow & \underline{\underline{n\approx 5114}} &
\end{array}
$$

Insgesamt wurden also $\underline{\underline{5114}}$ Ereignisse registriert.

1.2 Die Wahrscheinlichkeit des Ereignis E_1 kann direkt aus der Verteilung ermittelt werden:

$$
\begin{aligned}
P(E_1) &= P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8) \\
&= 0{,}02+9\cdot 0{,}001+0{,}001+0 \\
&= 0{,}02+0{,}009+0{,}001=\underline{\underline{0{,}03}}
\end{aligned}
$$

Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E_2 und E_3 müssen zusätzlich alle möglichen Kombinationen (d.h.: Reihenfolgen in denen die zufälligen Ereignisse ausgewählt werden) berücksichtigt werden, sodass mit der Binomialverteilung gerechnet werden muss.

$$P(E_2)=B(20;0{,}02;3)=\binom{20}{3}\cdot 0{,}02^3\cdot 0{,}98^{17}\approx \underline{\underline{0{,}00647}}$$

Für Ereignis E_3 sollen dabei von 50 Ereignissen weniger als 16 % aus der Kategorie 3 sein. Wegen $50 \cdot 0{,}16 = 8$ dürfen also höchstens 7 Ereignisse aus der Kategorie 3 sein. Zur Berechnung wird die kumulierte Binomialverteilung verwendet, denn E_3 tritt sowohl ein, wenn kein Ereignis, ein Ereignis, zwei Ereignisse ... oder 7 Ereignisse aus Kategorie 3 kommen:

$$P(E_3) = \sum_{i=0}^{7} B(50; 0{,}2; i) = F_{0,2}^{50}(7) \approx \underline{\underline{0{,}19041}}$$

2 Laut Angaben ergeben sich die nachfolgenden relativen Häufigkeiten für Japan- oder Island-Reisen und die Zufriedenheit:

$$\begin{aligned} P(\text{nicht Zufrieden}) &= P(\overline{Z}) = \frac{30}{600} = 0{,}05 \\ P(\text{Japan-Reise}) &= P(J) = 0{,}6 \\ P(\text{Island-Reise und zufrieden}) &= P(I \cap Z) = \frac{228}{600} = 0{,}38 \end{aligned}$$

Damit kann eine Vierfeldertafel erstellt und entsprechend ergänzt werden:

	I	J	
Z	0,38		
$\overline{Z}$			0,05
		0,6	1

$\Rightarrow$

	I	J	
Z	0,38	0,57	0,95
$\overline{Z}$	0,02	0,03	0,05
	0,4	0,6	1

Es wird nun jeweils die bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet unter der ein Kunde, der sich für eine Japan- oder Island-Reise entscheidet, zufrieden sein wird:

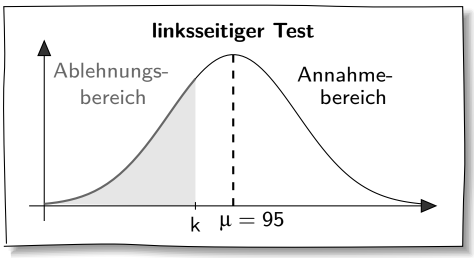
$$\begin{aligned} P_I(Z) &= \frac{P(Z \cap I)}{P(I)} = \frac{0{,}38}{0{,}4} = 0{,}95 \\ P_J(Z) &= \frac{P(Z \cap J)}{P(J)} = \frac{0{,}57}{0{,}6} = 0{,}95 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeiten sind gleich. Demnach sollte es keinen Einfluss auf die Zufriedenheit haben, für welches Reiseziel sich der Kunde entscheidet und die Aussage des Reiseportals ist falsch.

3.1 Die Testgröße T beschreibt die Anzahl der Kunden, die bei der erneuten Befragung angeben, mit der Reise zufrieden gewesen zu sein.

Die Nullhypothese H_0 lautet: Mindestens 95 % der befragten Kunden waren mit der Reise zufrieden.
Der Erwartungswert ($\mu = n \cdot p$) liegt bei $\mu = 100 \cdot 0{,}95 = 95$ befragten Kunden, die mit der Reise zufrieden waren.

Nullhypothese	Gegenhypothese
$H_0 : p \geq 0{,}95$	$H_1 : p < 0{,}95$
Annahmebereich von H_0:	Ablehnungsbereich von H_0:
$A = \{k+1; ...; 100\}$	$\overline{A} = \{0; 1; ...; k\}$



Anmerkung: k liegt immer im Ablehnungsbereich. Es handelt sich um einen linksseitigen Hypothesentest, da vermutet wird, dass weniger als 95 % der Kunden zufrieden mit der Reise waren und somit k links vom Erwartungswert liegt (siehe Skizze).

Mit dem gegebenen Signifikanzniveau von 5 % gilt dann:

$$\begin{aligned} & P(T \leq k) \leq 0{,}05 \\ \Longleftrightarrow \quad & F_{0{,}95}^{100}(k) \leq 0{,}05 \end{aligned}$$

Der gesuchte Wert k kann dabei einem Tafelwerk in der rechten Spalte entnommen werden. Somit ist $k = 90$, da hier der Prozentwert der Summe das letzte Mal **kleiner** als 0,05 ist. Den größtmöglichen Ablehnungsbereich erhält man somit für $k = 90$. Er lautet $\overline{A} = \{0; 1; ...; 90\}$. Damit ist der minimale Annahmebereich von H_0 $A = \{91; 92; ...; 100\}$.

Wenn 8 der befragten Kunden unzufrieden waren, heißt dies, dass 92 zufrieden mit der Reise waren. Da dies im Annahmebereich liegt, sollte der Verbraucherschutz auf Grundlage des Tests zur Entscheidung kommen, dass die Angaben richtig sind.

3.2 Beim Fehler 2. Art würde die Nullhypothese H_0 angenommen, obwohl H_1 richtig ist. Mit $A = \{91; 92; ...; 100\}$ und einem tatsächlichen Anteil von 90 % gilt für den Fehler 2. Art:

$$\begin{aligned} P(\text{„Fehler 2. Art“}) &= P(T \geq 91) \\ &= 1 - P(T \leq 90) = 1 - F_{0{,}9}^{100}(90) = 1 - \sum_{i=0}^{90} B(100; 0{,}9; i) \\ &\approx 1 - 0{,}54871 = \underline{\underline{0{,}45129}} \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 45,129 % geht man davon aus, dass H_0 richtig ist, obwohl nur 90 % der befragten Kunden zufrieden waren, statt 95 %.